目　　录

一、单位根的基本性质 ……………………………………1
二、单位根与整除性……………………………………11
三、单位根与因式分解…………………………………23
四、单位根与高次方程…………………………………26
五、有关正三角形的证明题……………………………32
六、莫雷定理……………………………………………41
七、单位根群……………………………………………51
练习题……………………………………………………57
练习题解法概要…………………………………………59

VISIT…

LANZAROTE

Caliente.COM

一、单位根的基本性质

先看一个简单而有趣的例题①：

［例 1］ 已知 $a^2+a+1=0$，求证

$$a^{1979}+\left(\frac{1}{a}\right)^{1979}=a^{2000}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2000}.$$

证 从条件 $a^2+a+1=0$ 可以得到 $a^3=1$，这是因为：

$$a^3=(a^3-1)+1=(a-1)(a^2+a+1)+1=1.$$

所以

$$a^{1979}=a^{3\times659+2}=(a^3)^{659}\cdot a^2=a^2,$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{1979}=\frac{1}{a^{1979}}=\frac{1}{a^2}=\frac{a}{a^3}=a,$$

$$a^{2000}=a^{3\times666+2}=(a^3)^{666}\cdot a^2=a^2,$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{2000}=\frac{1}{a^{2000}}=\frac{1}{a^2}=a.$$

由此立刻得到

$$a^{1979}+\left(\frac{1}{a}\right)^{1979}=a^{2000}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2000}.$$

事实上，我们不仅能证明上述等式成立，而且能把每端的值也求出来：

$$a^{1979}+\left(\frac{1}{a}\right)^{1979}=a^2+a=(a^2+a+1)-1=-1.$$

用类似的方法，可以解答下面这个更一般的例题：

① 如无说明，本书中字母代表复数。

［例 2］ 若 $a^2+a+1=0$, n 为某一自然数, 求 $a^n+\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

解 $a^n+\left(\frac{1}{a}\right)^n=\begin{cases}-1, & \text{当 } n \text{ 不是 3 的倍数;}\\ 2 & \text{当 } n \text{ 是 3 的倍数.}\end{cases}$

详细的解答过程这里就不写了，请读者补出．很容易看出,解答例 2 的关键步骤,仍在于发现并利用等式

$$a^3=1.$$

不单是这两个例题，而且本书以下将要讨论的大部分的问题和练习题,都要涉及到一个如下形式的等式:

$$a^n=1,\ n \text{ 为某一自然数}.$$

那么满足这个等式的 a 究竟是些什么数呢?

从一个角度讲,$a^n=1$ 中的 a 就是 1 的 n 次方根．高中数学告诉我们,在复数范围里,由于

$$1=\cos 0+i\sin 0,$$

由复数开方法则,就得到 1 的 n 次方根为

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}. \tag{1}$$

其中 k 为任意的整数．在本书中，ε_k 始终取这个含义．当 k 取 0, 1, …, $n-1$ 时 ε_k 有 n 个各不相同的值，而当 k 取其他数值时，ε_k 就要和 ε_0, ε_1, …, ε_{n-1} 中的一个相同,这从“正弦和余弦都是周期为 2π 的周期函数”不难证得．通常 1 的任何一个 n 次方根又叫 n 次单位根或单位根．上述结果就是说: n 次单位根有并且只有 n 个不同的值,为

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{n-1}.$$

我们特别注意到 $\varepsilon_0=1$.

从另一个角度讲, n 次单位根又是方程

$$x^n-1=0 \tag{2}$$

的根．或者说，$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 是方程(2)的 n 个不同的（也是全部的）根．更进一步，由于

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1),$$

所以 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 恰是方程

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$$

的全部根．由此，我们立刻可以得到

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1}), \qquad (3)$$

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1}). \qquad (4)$$

为了使读者对单位根有些感性知识，我们先具体地讨论一下 $n=3$ 的情况．

［例 3］ 三次单位根

$$\varepsilon_0=1,$$

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

习惯上，对三次单位根常用 ω 来记 ε_1，这时，

$$\omega^2=\varepsilon_1^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\varepsilon_2,$$

因此恰有 $\varepsilon_2=\omega^2$．本书中以后总以 $1, \omega, \omega^2$ 记三次单位根．再明确一下，

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

我们现在来罗列一下三次单位根的性质：

(1) 三次单位根的模都是 1，即

$$|1|=|\omega|=|\omega^2|=1.$$

(2) $1,\omega,\omega^2$ 是 $x^3-1=0$ 的根，而 ω,ω^2 又是 $x^2+x+1=0$ 的根，由根和系数的关系，立刻得

$$1+\omega+\omega^2=0 \quad 或 \quad \omega+\omega^2=-1.$$

读者现在可以想一想，在例 1、例 2 中怎么会想到 $a^3=1$ 的？

(3) 不仅 $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2$，而且 $\varepsilon_2^2=\varepsilon_1$. 事实上

$$\varepsilon_2^2=(\omega^2)^2=\omega^3\cdot\omega=\omega=\varepsilon_1.$$

这说明，如果我们规定 $\varepsilon_2=\omega$，那就有 $\varepsilon_1=\omega^2$，而三次单位根仍然是 $1,\ \omega,\ \omega^2$ 这样的形式. 但本书中为了使 ω、ω^2 的几何意义更确定，总规定

$$\varepsilon_1=\omega.$$

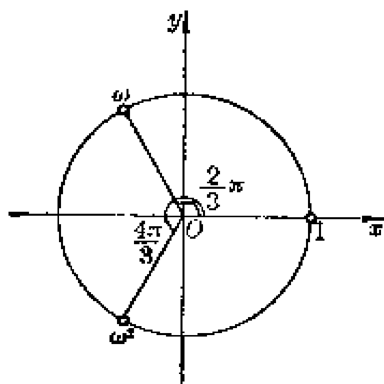


图 1

(4) 在复数平而上标出三次单位根时，它们恰恰把一个半径为 1 的圆——单位圆三等分(图 1)，而且其中的一个分点是 (1, 0).

(5) $\overline{\omega}=\omega^2,\ \overline{\omega^2}=\omega.$

这从 ω、ω^2 的值和图 1 上都很容易看出.

(6) $1^n+\omega^n+(\omega^2)^n=\begin{cases}3, & 当\ n\ 是\ 3\ 的倍数时;\\ 0, & 当\ n\ 不是\ 3\ 的倍数时.\end{cases}$

设 r 是 n 除以 3 的余数，即 $n=3q+r,\ 0\leqslant r<3$. 则有

$$1^n+\omega^n+(\omega^2)^n=(1^3)^m\cdot 1^r+(\omega^3)^m\cdot\omega^r+(\omega^3)^{2m}\cdot\omega^{2r}$$
$$=1+\omega^r+\omega^{2r}.$$

而当 n 是 3 的倍数时余数 $r=0$，当 n 不是 3 的倍数时余数 $r=1$ 或 $r=2$. 用 r 的这些值代入后立刻可以算得.

现在我们来介绍 n 次单位根的性质，读者可以看出上面罗列的性质不过是 $n=3$ 时的特例.

性质 1 n 次单位根的模是 1. 即

$$|\varepsilon_k|=1,\ k\text{ 为任意整数.}$$

证 从 ε_k 的表示式(1)中立刻可得.

这个性质还说明，n 次单位根都不是 0.

性质 2 两个 n 次单位根 ε_j、ε_k 的乘积仍然是一个 n 次单位根，具体地，有

$$\varepsilon_j\cdot\varepsilon_k=\varepsilon_{j+k}. \tag{5}$$

其中 j、k 是任意整数.

证 由(1)式和复数乘法法则，得

$$\varepsilon_j\cdot\varepsilon_k=\left(\cos\frac{2j\pi}{n}+i\sin\frac{2j\pi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$=\cos\frac{2(j+k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(j+k)\pi}{n}=\varepsilon_{j+k}.$$

这是单位根的一个非常重要而基本的性质，由此可以得出一系列有用的推论.

推论 1 $(\varepsilon_j)^{-1}=\varepsilon_{-j}$.

证 根据复数中负指数的定义，$(\varepsilon_j)^{-1}=\dfrac{1}{\varepsilon_j}$，但

$$\varepsilon_j\cdot\varepsilon_{-j}=\varepsilon_{j+(-j)}=\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_j\neq 0,$$

$$\therefore\quad (\varepsilon_j)^{-1}=\frac{1}{\varepsilon_j}=\varepsilon_{-j}.$$

推论 2 对任何整数 m，有

$$(\varepsilon_k)^m=\varepsilon_{mk}.$$

证 分三种情况讨论:

i) 当 m 是正整数时，取 m 个 ε_k 连乘并利用(5)式，即得

$$(\varepsilon_k)^m=\varepsilon_{mk}.$$

ii) 当 $m=0$ 时,注意到非零复数的零指数的意义,有

$$(\varepsilon_k)^0=1=\varepsilon_0.$$

结论也成立.

iii) 当 m 是负整数时,$-m$ 就是正整数,从而

$$(\varepsilon_j)^m=\frac{1}{(\varepsilon_j)^{-m}}=\frac{1}{\varepsilon_{-mj}}=\varepsilon_{mj}.$$

推论 3 若 k 除以 n 的余数为 r,则

$$\varepsilon_k=\varepsilon_r.$$

由此立刻可得 $\varepsilon_k=\varepsilon_l$ 的充分必要条件是 k 与 l 除以 n 后余数相同,或者说 k 与 l 的差是 n 的倍数.

证 由题设,$k=nq+r$,其中 q 是整数,$0\leqslant r<n-1$. 那么

$$\varepsilon_k=\varepsilon_{nq+r}=\varepsilon_{nq}\cdot\varepsilon_r=(\varepsilon_q)^n\cdot\varepsilon_r=\varepsilon_r.$$

其中 $(\varepsilon_q)^n=1$ 是因为 ε_q 也是 n 次单位根.

作为这条性质的特例,我们得到: $\varepsilon_k=1$ 的充分必要条件是 $r=0$, 即 k 是 n 的倍数.

由于余数只可能是 0, 1, …, $n-1$ 这 n 个, 我们再次肯定了任何 n 次单位根的值只有

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_{n-1} \tag{6}$$

这 n 个不同的值. 为了叙述的方便,以后凡说到"所有 n 次单位根",就是指 n 个互不相等的 n 次单位根,特别地,它们可以用(6)式作为代表.

推论 4 任何一个单位根都可以写成 ε_1 的幂,具体地说,

$$\varepsilon_k=(\varepsilon_1)^k.$$

这是推论 2 的明显结果.

现在问,所有 n 次单位根中,除了 ε_1 外,还有没有另一个单位根 ε_l, 能使得任何一个单位根都是 ε_l 的幂?

这是可能有的．以三次单位根为例，除了 ε_1 能使

$$\omega=\varepsilon_1,\ \omega^2=(\varepsilon_1)^2,\ 1=(\varepsilon_1)^3$$

外．ε_2 也有这样的性质，因为

$$\varepsilon_2=\varepsilon_2,\ \varepsilon_1=\omega=\omega^4=(\varepsilon_2)^2,\ 1=(\varepsilon_2)^3.$$

有这种性质的 n 次单位根，称为是 n 次本原单位根，简称为 n 次原根或原根．

n 次单位根中除 ε_1 外哪些是原根？这一点放在第七节中介绍．

从这个推论我们知道，所有 n 次单位根还可以写成

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_1^2,\ \cdots,\ \varepsilon_1^{n-1},\ \varepsilon_1^n(=\varepsilon_0=1). \tag{7}$$

推论 5 一个 n 次单位根的共轭也是一个 n 次单位根，具体地说，

$$\overline{\varepsilon_k}=\varepsilon_{n-k}.$$

证 由复数性质 $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ 和 $|\varepsilon_k|=1$，得

$$\overline{\varepsilon_k}=\frac{|\varepsilon_k|^2}{\varepsilon_k}=\frac{1}{\varepsilon_k}=\varepsilon_{-k}=\varepsilon_{n-k}.$$

最后一个等号是因为 $-k$ 和 $n-k$ 的差是 n．

从证明过程中我们看到单位根的倒数还可写成其共轭：

$$\frac{1}{\varepsilon_k}=\overline{\varepsilon_k}.$$

这个推论说明，所有虚的 n 次单位根都成对共轭．

推论 6 对任何整数 k、l，有

$$(\varepsilon_k)^l=(\varepsilon_l)^k.$$

证 $(\varepsilon_k)^l=\varepsilon_{kl}=(\varepsilon_l)^k$.

性质 3 设 m 是整数，则

$$1+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=\begin{cases}n, & \text{当 } m \text{ 是 } n \text{ 的倍数时；}\\ 0, & \text{当 } m \text{ 不是 } n \text{ 的倍数时．}\end{cases}$$

证 当m是n的倍数时，$(\varepsilon_k)^m=1$对任何k都成立，故

$$1+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=n.$$

当m不是n的倍数时，$(\varepsilon_1)^m=\varepsilon_m\neq1$，故

$$1+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=1+\varepsilon_1^m+(\varepsilon_1^2)^m+\cdots+(\varepsilon_1^{n-1})^m$$

$$=1+\varepsilon_1^m+(\varepsilon_1^m)^2+\cdots+(\varepsilon_1^m)^{n-1}$$

$$=\frac{1-(\varepsilon_1^m)^n}{1-\varepsilon_1^m}=\frac{1-(\varepsilon_1^n)^m}{1-\varepsilon_1^m}=\frac{1-1}{1-\varepsilon_1^m}=0.$$

推论1 全部单位根的和为0，即

$$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1}=0.$$

证 这是性质3中$m=1$的特例．又从全部n次单位根是$x^n-1=0$的根并结合根与系数的关系也可证明这个推论．

推论2 设n次单位根$\varepsilon_k\neq1$，则

$$1+\varepsilon_k+(\varepsilon_k)^2+\cdots+(\varepsilon_k)^{n-1}=0$$

证 由于$\varepsilon_k\neq1$，故k不是n的倍数，利用性质2的推论6和性质3，有

$$1+\varepsilon_k+(\varepsilon_k)^2+\cdots+(\varepsilon_k)^{n-1}$$

$$=1+(\varepsilon_1)^k+(\varepsilon_2)^k+\cdots+(\varepsilon_{n-1})^k=0.$$

性质4 全部单位根正好把复平面上的单位圆n等分，即构成了外接圆半径为1的正n边形顶点，并且一个分点或顶点是(1, 0)．

高中数学课本中已有这一性质的证明，这里从略。

现在我们继续研究一些习题：

[例4] 求五次单位根．

解 可以证明(见书末练习题1)：

$$\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

所以 $$\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72°=\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

由此得到 $$\varepsilon_0=1,$$

$$\varepsilon_1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i.$$

由性质 2 推论 4，得到

$$\varepsilon_2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i\right)^2$$
$$=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i.$$

再利用性质 2 推论 5，又得到

$$\varepsilon_3=\overline{\varepsilon_2}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i,$$

$$\varepsilon_4=\overline{\varepsilon_1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i.$$

[例 5] 求六次单位根.

解 $\varepsilon_0=1,$

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega,$$

$$\varepsilon_3=\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}=-1,$$

$$\varepsilon_4=\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega^2,$$

$$\varepsilon_5=\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

读者可以验证一下对五、六次单位根来说，是否满足单位根的诸性质。

[例 6]　求

$$1+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\cdots+C_n^{3l-3}+C_n^{3l}.$$

其中 $3l$ 是不大于 n 的最大的 3 的倍数。

分析　这道题目就是要从组合数的序列

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^3,\ \cdots,\ C_n^{n-1},\ C_n^n$$

中，从第一个开始，每隔两个取出一个求和。

回忆一下我们熟知的

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$$

是怎样求出的．一种求法是，在

$$C_n^0+C_n^1x+C_n^2x+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n$$

中，分别令 $x=+1,\ -1$（注意这也就是二次单位根），然后相加，得

$$2C_n^0+C_n^1[1+(-1)]+C_n^2[1^2+(-1)^2]+C_n^3[1^3+(-1)^3]$$
$$+\cdots+C_n^n[1^n+(-1)^n]=(1+1)^n+(1-1)^n,$$

等号左边逢奇项为 0，逢偶项方括号中为 2，故

$$2(C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots)=2^n$$

故
$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}.$$

根据性质 3，三次单位根有性质：

$$1+\omega^m+(\omega^2)^m=\begin{cases}3, & \text{当 } m \text{ 是 3 的倍数时；}\\ 0, & \text{当 } m \text{ 不是 3 的倍数时.}\end{cases}$$

恰好能用于本题。

证　在

$$C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n$$

中，分别令 $x=1,\ \omega,\ \omega^2$，然后相加．得

$$3C_n^0+(1+\omega+\omega^2)C_n^1+[1^2+\omega^2+(\omega^2)^2]C_n^2$$
$$+[1^3+\omega^3+(\omega^2)^3]C_n^3+\cdots+[1^n+\omega^n+(\omega^2)^n]C_n^n$$
$$=(1+1)^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n.$$

由于性质 3，左边的系数恰恰是从第一项起隔两项为 3，其余为 0，故

$$3C_n^0+3C_n^3+3C_n^6+\cdots+3C_n^{3l}=2^n+(-\omega^2)^n+(-\omega)^n.$$

即

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\cdots+C_n^{3l}=\frac{1}{3}[2^n+(-\omega^2)^n+(-\omega)^n]$$
$$=\frac{1}{3}\left[2^n+\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^n\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

二、单位根与整除性

设 $f(x)$ 和 $p(x)$ 是两个已知的多项式，并且假定可找到第三个多项式 $q(x)$，使得

$$f(x)=p(x)\cdot q(x). \tag{1}$$

如果这三个多项式 $f(x)$、$p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数都是整数，就说在整系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除，或者说 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式.

类似地，如果(1)式中多项式 $f(x)$，$v(x)$ 和 $q(x)$ 的系数都是有理数，就说在有理系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除，而如果(1)式中三个多项式 $f(x)$，$p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数都是实数，或者都是复数，则相应地说在实系数范围内或在复系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除.

中学数学里常见的系数允许范围，不外乎整数、有理数、实数和复数四种情形，其中尤以整系数多项式的整除性问题最为常见。

［例 1］ 若

$$f(x)=x^2-1,\quad p(x)=2x+2,$$

则 $f(x)$ 和 $p(x)$ 都是整系数多项式. 但在整系数范围内，$f(x)$ 却不能被 $p(x)$ 整除，因为虽然我们可写出形如(1)式的等式

$$x^2-1=(2x+2)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right),$$

但是右端第二个多项式 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的系数已不是整数了.

如果扩大讨论范围，把 x^2-1 和 $2x+2$ 都看成有理系数多项式，则在有理系数范围内，多项式 x^2-1 又能被 $2x+2$ 整除了.

例 1 表明，整除性与系数允许范围有很大关系. 给定了两个多项式 $f(x)$ 和 $p(x)$，即使能找到第三个多项式 $q(x)$，使(1)式成立，仍不能贸然断定 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除，还要看三个多项式 $f(x)$，$p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数是否都在我们研究的范围之内. 其中，$f(x)$ 和 $p(x)$ 既然是已知多项式，它们的系数当然都应该包括在允许范围之内，因而关键就在于考察多项式 $q(x)$ 的系数是否仍属于允许范围了. 但是由(1)式知道，$q(x)$ 的系数可由 $f(x)$ 的系数和 $p(x)$ 的系数决定，所以为了使检查系数范围的这一步手续得到简化，我们考虑下面的问题：

设多项式 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的系数都属于同一允许范围，并且知道存在某个多项式 $q(x)$，使

$$f(x)=p(x)\cdot q(x),$$

问在什么条件下，$q(x)$ 的系数也属于这一允许范围？

为了讨论这个问题，设两已知多项式为

$$f(x)=f_0x^m+f_1x^{m-1}+\cdots+f_{m-1}x+f_m, \tag{2}$$

$$p(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n, \tag{3}$$

它们的系数 $f_0, f_1, \cdots, f_m, p_0, p_1, \cdots, p_n$ 都属于某一允许范围，并且

$$p_0\neq 0, \quad m\geqslant n.$$

又设

$$q(x)=q_0x^{m-n}+q_1x^{m-n-1}+\cdots+q_{m-n-1}x+q_{m-n}, \tag{4}$$

并且乘积 $p(x)\cdot q(x)$ 恒等于 $f(x)$. 将(3)式右端和(4)式右端的表达式相乘，展开后合并同类项，并与(2)式右端比较对应项的系数，得到：

$$f_0=p_0q_0,$$
$$f_1=p_0q_1+p_1q_0,$$
$$f_2=p_0q_2+p_1q_1+p_2q_0,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$f_k=p_0q_k+p_1q_{k-1}+\cdots+p_{k-1}q_1+p_kq_0,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$f_{m-n}=p_0q_{m-n}+p_1q_{m-n-1}+\cdots+p_{m-n}q_0$$
$$\cdots\cdots,$$

其中当 $l>n$ 时 $p_l=0$.

由于 $p_0\neq 0$, 前 $m-n+1$ 个等式可改写成

$$q_0=f_0\div p_2,$$
$$q_1=(f_1-p_1q_0)\div p_0,$$
$$q_2=(f_2-p_1q_1-p_2q_0)\div p_0,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$q_{m-n}=(f_{m-n}-p_1q_{m-n-1}-\cdots-p_{m-n}q_0)\div p_0.$$

这就是说，从所得到的一连串等式，可由已知多项式 $f(x)$ 和

$p(x)$的系数顺次求出多项式 $q(x)$的各个系数 $q_0, q_1, \cdots, q_{m-n}$，并且在计算过程中只用到加、减、乘、除四则运算，而且每次作为除数的总是同一个非零系数 p_0. 由于复数间进行四则运算的结果仍得到复数，而实数进行四则运算的结果仍得到实数，有理数四则运算的结果仍得到有理数，这样就得到下面的结论:

设多项式 $f(x)$等于多项式 $p(x)$ 与 $q(x)$的乘积，那末:

(1) 若 $f(x)$和 $p(x)$的系数都是复数，则 $q(x)$ 的系数也是复数;

(2) 若 $f(x)$和 $p(x)$ 的系数都是实数，则 $q(x)$的系数也是实数;

(3) 若 $f(x)$和 $p(x)$的系数都是有理数，则 $q(x)$的系数也是有理数.

进而，如果 p_0 等于 1，那末在求 $q(x)$的各项系数时只须进行加、减、乘三种运算，而从若干整数进行加、减、乘的结果仍得到整数，所以又得到一个结论:

(4) 设多项式 $f(x)$等于 $p(x)$与 $q(x)$ 的乘积，并且多项式 $f(x)$和 $p(x)$ 的系数都是整数，$p(x)$ 的最高次项系数 p_0 等于 1，则多项式 $q(x)$的系数也都是整数.

在一个多项式中，次数最高的项叫做*首项*. p_0 就是多项式 $p(x)$的首项的系数.

利用这些结论和术语，并且回顾前面关于多项式整除性的定义，可得到一个较方便的判别法如下:

法则 1 设 $f(x)$和 $p(x)$ 是两个已知的多项式，并设存在第三个多项式 $q(x)$，使得

$$f(x)=p(x)\cdot q(x),$$

那末在这样的条件下，有:

1) 若已知多项式 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的系数都是复数，则在复系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除；

2) 若 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的系数都是实数，则在实系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除；

3) 若 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的系数都是有理数，则在有理系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除；

4) 若 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的系数都是整数，并且 $p(x)$ 的首项系数是 1，则在整系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除.

根据这个法则，在讨论多项式整除性的问题时，在什么数的范围内整除，除了必须有 $q(x)$ 使 $f(x)=p(x)\cdot q(x)$ 之外，$q(x)$ 的系数范围完全由已知多项式 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的系数所属范围决定. 因而我们在下面讨论整除性问题时，一般不再强调系数允许范围.

中学里我们学过一个著名的定理：

余数定理 多项式 $f(x)$ 被 $x-a$ 除，所得的余数等于 $f(a)$.

从余数定理立刻推出

法则 2 为了使多项式 $f(x)$ 被 $x-a$ 整除，必须且只须 $f(a)=0$.

注意，由于这里除式 $x-a$ 的首项系数为 1，所以法则 2 对于整系数、有理系数、实系数和复系数四种不同情形都适用.

从法则 2 可推得

法则 3 若多项式 $f(x)$ 满足条件

$$f(a)=f(b)=0,\quad a\neq b,$$

则 $f(x)$ 被 $x^2-(a+b)x+ab$ 整除.

证 从 $f(a)=0$，知 $f(x)$ 被 $x-a$ 整除，即存在多项式

$q(x)$，使
$$f(x)=(x-a)q(x).$$
因而
$$(b-a)q(b)=f(b)=0.$$
但 $b\neq a$，故 $q(b)=0$. 由此知 $q(x)$ 被 $x-b$ 整除，即存在多项式 $s(x)$，使
$$q(x)=(x-b)s(x).$$
这样就得到
$$\begin{aligned}f(x)&=[(x-a)(x-b)]s(x)\\&=[x^2-(a+b)x+ab]s(x),\end{aligned}$$
所以 $f(x)$ 被 $x^2-(a+b)x+ab$ 整除.

推论 1 若实系数多项式 $f(x)$ 满足等式 $f(\alpha+\beta i)=0$，其中 α 和 β 是实数且 $\beta\neq 0$，则 $f(x)$ 被 $x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)$ 整除.

证 由于 $f(x)$ 是实系数多项式，中学课本中指出，从条件
$$f(\alpha+\beta i)=0,$$
可得
$$f(\alpha-\beta i)=0.$$
因 $\beta\neq 0$，得 $\alpha+\beta i\neq\alpha-\beta i$. 应用法则 3，就得到所需证明的结论.

推论 1 的如下特例特别有用：

推论 2 若整系数多项式 $f(x)$ 满足条件
$$f(\omega)=0,\quad \omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
则 $f(x)$ 被 x^2+x+1 整除.

注意，根据本节法则 1 可知，法则 3 对于复系数、实系数、有理系数和整系数四种范围内的整除性问题都适用. 推论 1 的作用在于借助虚数论证实系数范围内的整除性问题，而推论 2 则更进一步借助三次虚单位根 ω 讨论整系数范围内的整

除性问题.

仿照法则 3, 可证明下面的

法则 4 若多项式 $f(x)$ 满足条件

$$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0,$$

并且数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相等,则 $f(x)$ 被乘积 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 整除.

由于

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1}),$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 是除 1 之外的全部 n 次单位根, 并且注意 n 次虚单位根成对共轭,立刻得到

推论 设 ε_k 是 n 次单位根,若整系数多项式 $f(x)$ 满足一组等式

$$f(\varepsilon_k)=0,\quad \text{其中 } k \text{ 取}\begin{cases}1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数;}\\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数,}\end{cases}$$

则 $f(x)$ 被 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ 整除.

这个推论的作用在于借助 n 次复单位根研究整系数范围内的多项式整除性问题. 尽管讨论过程中出现复数, 但因已知多项式 $f(x)$ 是整系数的, 并且除式 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ 是首项系数为 1 的整系数多项式,所以由法则 1, 可保证商式仍为整系数多项式.

[例 2] 设

$$f(x)=x^{3m+1}+x^{3n+2}+1,$$

其中 m 和 n 是任意整数. 求证 $f(x)$ 被 x^2+x+1 整除.

证 $\quad f(\omega)=\omega^{3m+1}+\omega^{3n+2}+1=\omega+\omega^2+1=0,$

所以由法则 3 的推论 2, 知道 $f(x)$ 被 x^2+x+1 整除.

[例 3]　设 n 为任意自然数，并且

$$f(x)=x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}.$$

求证对于任意整数 k，$f(k)$ 是 k^2+k+1 的倍数.

证　　$$f(\omega)=\omega^{n+2}+(\omega+1)^{2n+1}$$
$$=\omega^{n+2}+(-\omega^2)^{2n+1}$$
$$=\omega^{n+2}\cdot\omega^{3n}-\omega^{4n+2}=0,$$

可知 $f(x)$ 被 x^2+x+1 整除，其商式为 x 的整系数多项式. 因而对于任意整数 k，$f(k)$ 是 k^2+k+1 的整数倍.

[例 4]　求 $x^{1001}-1$ 被 $x^4+x^3+2x^2+x+1$ 除得的余式.

解　记

$$x^{1001}-1=f(x),$$
$$x^4+x^3+2x^2+x+1=p(x),$$

并且设

$$f(x)=p(x)\cdot q(x)+r(x), \tag{1}$$

这里 $q(x)$ 是 $f(x)$ 被 $p(x)$ 除得的商式，$r(x)$ 是余式. 由于除式 $p(x)$ 是四次多项式，所以 $r(x)$ 是最多三次的多项式. 因而可设

$$r(x)=ax^3+bx^2+cx+d, \tag{2}$$

其中 a, b, c, d 是待定的实系数. 由于

$$p(x)=(x^2+1)(x^2+x+1),$$

得到

$$p(i)=p(\omega)=0, \tag{3}$$

因而从(1)式和(3)式得到

$$f(i)=r(i),\quad f(\omega)=r(\omega). \tag{4}$$

但　　$$f(i)=i^{1001}-1=i-1,$$
$$r(i)=-ai-b+ci+d;$$

$$f(\omega)=\omega^{999+2}-1=\omega^2-1=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{aligned}r(\omega)&=a+b\omega^2+c\omega+d\\&=a+d-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}+i\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{2}\right),\end{aligned}$$

所以代入(4)式后分离实部和虚部，得到

$$\begin{cases}d-b=-1,\\c-a=1;\\a+d-\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{2}=-\dfrac{3}{2},\\\dfrac{c\sqrt{3}}{2}-\dfrac{b\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

由此容易解出

$$a=-1,\quad b=1,\quad c=d=0,$$

即余式为 $r(x)=-x^3+x^2$.

［例 5］ 设 $P(x)$，$Q(x)$ 和 $R(x)$ 和 $S(x)$ 都是多项式，满足条件

$$\begin{aligned}&P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)\\&=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x),\end{aligned}\qquad(1)$$

求证 $x-1$ 是 $P(x)$ 的因式.

本题是 1976 年美国第五届中学数学竞赛的一条试题. 这里介绍两种证法.

证法 1 由于 $P(x)$，$Q(x)$ 和 $R(x)$ 都是多项式，所以从问题的条件推出 $S(x)$ 也是多项式. 令

$$P(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_mx^m,$$

$$S(x)=s_0+s_1x+s_2x^2+\cdots+s_nx^n.$$

这里要注意，$P(x^5)$ 的各项的次数都具有 $5k$ 的形状，k 是非负

整数．而 $xQ(x^5)$ 各项的次数具有 $5k+1$ 的形状，$x^2R(x^5)$ 各项次数则为 $5k+2$ 形．因而，在(1)式左端，次数具有 $5k-1$ 形状的各项都是 0．再从右端计算 $5k-1$ 次方项的系数，由于它们都是 0，得到

$$s_{5k-1}+s_{5k-2}+s_{5k-3}+s_{5k-4}+s_{5k-5}=0. \qquad (2)$$

另一方面，比较(1)式两边 $5k$ 次方项的系数，有

$$p_0=s_0, \qquad (3)$$

$$p_k=s_{5k}+s_{5k-1}+s_{5k-2}+s_{5k-3}+s_{5k-4}. \quad (k\geqslant 1) \qquad (4)$$

从(2)式和(4)式得到

$$p_k=s_{5k}-s_{5k-5}. \quad (k\geqslant 1) \qquad (5)$$

现在我们来证明 $s_{5m}=0$，用反证法．因为当 $k>m$ 时 $p_k=0$，故 $p_{m+1}=p_{m+2}=\cdots=p_{m+h}=0$ 对任何 h 都成立，所以

$$0=p_{m+1}+p_{m+2}+\cdots+p_{m+h}=s_{5m+5}-s_{5m}+s_{5m+10}$$
$$-s_{5m+5}+\cdots+s_{5m+5h}-s_{5m+5(h-1)}=s_{5m+5h}-s_{5m}.$$

如果 $s_{5m}\neq 0$，则有对任何 h，$s_{5m+5h}\neq 0$，这与 $S(x)$ 是多项式，并有一个最高项相矛盾，故 $s_{5m}=0$．

这样一来，由 $s_{5m}=0$ 就得到

$$P(x)=s_0+(s_5-s_0)x+(s_{10}-s_5)x^2$$
$$+\cdots+(s_{5m-5}-s_{5m-10})x^{m-1}-s_{5m-5}x^m,$$

即 $\quad P(x)=-(x-1)(s_0+s_5x+s_{10}x^2+\cdots+s_{5m-5}x^{m-1})$，

所以 $x-1$ 是 $P(x)$ 的因式．

证法 2 设 ε_k 是五次虚单位根，则

$$(\varepsilon_k)^5=1, \quad (\varepsilon_k)^2=\varepsilon_{2k},$$
$$(\varepsilon_k)^4+(\varepsilon_k)^3+(\varepsilon_k)^2+\varepsilon_k+1=0.$$

在问题的条件(1)中，将 x 以值 ε_k 代入，得

$$P(1)+\varepsilon_kQ(1)+\varepsilon_{2k}R(1)=0.$$

顺次取 $k=1, 2$，并以五次单位根 ε_1、ε_2 的值代入（见第一节

例 4)，并且分别考虑实部和虚部，就得到四个方程：

$$P(1)+\frac{\sqrt{5}-1}{4}Q(1)-\frac{\sqrt{5}+1}{4}R(1)=0,$$

$$P(1)-\frac{\sqrt{5}+1}{4}Q(1)+\frac{\sqrt{5}-1}{4}R(1)=0,$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,Q(1)+\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,R(1)=0,$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,Q(1)-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,R(1)=0.$$

从中不难解出

$$P(1)=Q(1)=R(1)=0. \tag{6}$$

所以从余数定理知道 $P(x)$ 被 $x-1$ 整除，证完.

从上面的证明过程，还得到一个意外的收获：从(6)式可知，$Q(x)$ 和 $R(x)$ 也含有 $x-1$ 的因式．因而，本题利用单位根来解，不但过程比较简洁，而且可以一举证明三个多项式 $P(x)$，$Q(x)$ 和 $R(x)$ 都含 $x-1$ 的因式，从而 $S(x)$ 也含有 $(x-1)$ 的因子了，这就改进了原题结论.

例 5 还可推广．我们先分析一下解法 1．因为根据问题条件中给出的等式(1)，其右端 $5k-1$ 次方的项和 $5k-2$ 次方的项都应等于零．但在解法 1 中，只用到 $5k-1$ 次方的各项为零，没有用到 $5k-2$ 次方各项为零的条件．这就说明，在等式(1)的左端还可再添一项 $x^3T(x^5)$，其中 $T(x)$ 为某一多项式．因而，原题可推广为下面的

[例 6]　设 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ 和 $T(x)$ 是多项式，满足条件

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)+x^3T(x^5)$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x),$$

求证 $x-1$ 是 $P(x)$ 的因式.

证法 1 几乎逐字逐句重复例 5 的证法 1，略去.

证法 2 在问题的条件中，令 $x=\varepsilon_k$，这里 ε_k 是五次虚单位根，得到

$$P(1)+\varepsilon_k Q(1)+\varepsilon_{2k}R(1)+\varepsilon_{3k}T(1)=0.$$

取 $k=1, 2$，并以第一节例 4 中的值代入，再分离实部和虚部，得到

$$P(1)+\frac{\sqrt{5}-1}{4}Q(1)-\frac{\sqrt{5}+1}{4}R(1)$$
$$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}T(1)=0,$$

$$P(1)-\frac{\sqrt{5}+1}{4}Q(1)+\frac{\sqrt{5}-1}{4}R(1)$$
$$+\frac{\sqrt{5}-1}{4}T(1)=0,$$

$$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}Q(1)+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}R(1)$$
$$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}T(1)=0,$$

$$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}Q(1)-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}R(1)$$
$$+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}T(1)=0.$$

由此得到

$$P(1)=Q(1)=R(1)=T(1)=0.$$

所以从余数定理知道，$x-1$ 是 $P(x)$ 的因式，同时也是 $Q(x)$，$R(x)$ 和 $T(x)$ 的因式.

三、单位根与因式分解

因式分解问题，比起整除性问题来，又多一层困难．因为题目中并不告诉你有些什么因式，全靠你自己去找．如果遇到一个题目，它的所有因式都是高次的，那就很伤脑筋了．幸好，对于寻找某些类型的高次因式，单位根还能给我们帮帮忙．

[例 1]　分解因式：$x^8+x^6+x^4+x^2+1$．

分析　原式共有五项，各项系数都相等，而且 x 的指数 8, 6, 4, 2, 0 被 5 除后，所得余数为 3, 1, 4, 2, 0，五种可能余数恰好都出现相同次数（各出现一次）．所以，如果将 x 用任一个五次虚单位根代入，原式必定为零．因而知道，原式应有一个四次因式：

$$x^4+x^3+x^2+x+1.$$

找出了一个因式，就很容易用拆项法或其它方法完成因式分解了．

解　
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4)\\&\quad-(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3)\\&\quad+(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2)\\&\quad-(x^5+x^4+x^3+x^2+x)\\&\quad+(x^4+x^3+x^2+x+1)\\&=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).\end{aligned}$$

在高中里我们学过，因式分解问题，如果允许因式的系数为任意实数，则任一实系数多项式可分解成不高于二次的因式的乘积；如果允许因式的系数为复数，则任一多项式可分解

成一次因式的连乘积．所以，严格说来，因式分解问题也必须指定系数允许范围，才能决定应该分解到哪一步为止．但在中学课程里，因式分解的教材通常都安排在无理数概念引进之前，因而在做因式分解的问题时，只要题目中不明确规定系数允许范围，一般就都限制在有理数范围内讨论．这样一来，因式的次数可能就很高．例如本题若限制在有理数范围，则两个因式都是四次的．利用上节法则 2 的推论 2，还可将这些四次因式各分解成两个实系数因式之积，但这时系数中已出现无理数了．

[例 2]　分解因式：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$．

分析　本题是 1978 年我国八省市中学数学竞赛第二试的一条试题．仿照例 1 的理由，易知它含有 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 的因式．再用拆项法或直接用除法，立刻得到：

解法 1　用拆项法分组提取公因式，得到

$$原式=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

如果对上节例 2 印象深刻，知道 $x^{10}+x^5+1$ 被 x^2+x+1 整除，即 $\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$ 是整式，那末下面的解法也很容易想到：

解法 2

$$原式=\frac{(x^3)^5-1}{x^3-1}=\frac{(x^5)^3-1}{x^3-1}=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

[例 3]　分解因式：

(1) x^5+x^4+1　(分解成三个因式的积)；

(2) x^5+x+1　(分解成两个因式的积)．

分析　本题是过去莫斯科大学函授数学学校的一条入学试题．其中的第(2)小题，由上节例 2 知道，含有因式 x^2+x+1，

另一因式随之也就得到了．同理第(1)小题也含 x^2+x+1 的因式．但原题要求分解成三个因式之积，所以还须再找一个因式出来，有了两个因式才能从除法或拆项法确定第三个因式．为此，令 $x^2=y$，则原式化为 y^4+y^2+1，显然含 y^2+y+1 的因式，所以知道原式含 x^4+x^2+1 的因式．

上面寻找因式的过程，由于利用单位根的性质，显得非常简洁．虽然这些性质目前的中学课本里不作为教材正式内容，但知道了部分因式之后，也就不难另找一种不用单位根的解法如下．

解 (1) 利用一个辅助公式：

$$y^4+y^2+1=(y^4+2y^2+1)-y^2=(y^2+1)^2-y^2$$
$$=(y^2+y+1)(y^2-y+1),$$

得到：

$$x^8+x^4+1=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1).$$

(2)
$$x^5+x+1=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)$$
$$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$$
$$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$
$$=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1).$$

［例 4］ 分解因式：

$$1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+5a^6+4a^7+3a^8+2a^9+a^{10}.$$

分析 本题看上去比例 1 复杂得多，但若仔细观察，就会发现，只要令 $a^6=1$，就变成例 1 的类型．就是说，将 a 以六次单位根(除 1 而外)代入，其值为 0．因而知道应含五次因式

$$1+a+a^2+a^3+a^4+a^5.$$

但要注意，分解到这样的五次因式时，问题尚未做完，因为这个五次因式还可分解成一些次数更低的有理系数因式的乘

积.

解 原式$=(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)^2$

$$=[(1+a+a^2)+a^3(1+a+a^2)]^2$$

$$=[(1+a+a^2)(1+a^3)]^2$$

$$=(1+a+a^2)^2(1+a)^2(1-a+a^2)^2.$$

[例 5] 分解因式：$a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$.

分析 记原式为 $f(a)$，则

$$f(\omega)=\omega^2+(\omega+1)^2+(\omega^2+\omega)^2=\omega^2+(-\omega^2)^2+(-1)^2$$

$$=\omega^2+\omega^4+1=\omega^2+\omega+1=0,$$

所以知道原式必含 a^2+a+1 的因式.

解 原式$=a^2+a^2+2a+1+(a^2+a)^2$

$$=1+2(a^2+a)+(a^2+a)^2=(1+a+a^2)^2.$$

例 5 虽然简单，但是从它却引出一种速算法：原式为三个数的平方和，其中第二个数比第一个数大 1，第三个数等于前两个数的乘积. 经过因式分解后，简化为只要计算一个数的平方，而这个数恰好等于第三个数加 1. 例如：

$$5^2+6^2+30^2=31^2=961,$$

$$7^2+8^2+56^2=57^2=3249.$$

四、单位根与高次方程

利用单位根，可以很容易地导出三次方程的求根公式.

设 ω 是三次虚单位根（见第 3 页），则

$$\omega+\omega^2=-1,\quad \omega^3=1.$$

容易验证

$$(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx,$$

因而 $$(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$
$$=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$
由此可见，关于 x 的三次方程
$$x^3-3yz\cdot x+(y^3+z^3)=0$$
具有根
$$x_1=-(y+z),\ x_2=-(\omega y+\omega^2 z),$$
$$x_3=-(\omega^2 y+\omega z). \tag{1}$$
因此，如果已知一个三次方程
$$x^3+px+q=0, \tag{2}$$
为了解这个方程，只须令
$$-3yz=p, \tag{3}$$
$$y^3+z^3=q. \tag{4}$$
从(3)式得到
$$y^3\cdot z^3=-\frac{p^3}{27}. \tag{5}$$
从(4)式和(5)式知道，y^3 和 z^3 是下述一元二次方程的两个根：
$$X^2-qX-\frac{p^3}{27}=0.$$
这个方程的根是
$$X=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{6}$$
由于(1)式中 y 和 z 是对称的，所以(6)式中可取任一个为 y^3，另一个为 z^3. 因此，可取
$$y=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \tag{7}$$
$$z=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{8}$$

这里 y、z 可以各取三次方根中的一个，只须保证 $yz=-\frac{p}{3}$ 即可．将(7)式和(8)式代入(1)式，就得到三次方程(2)的求根公式，就是所谓卡丹公式．下面举例说明这个公式的应用．

[例 1] 解方程：$x^3-12x+16=0$.

解 在本题中 $p=-12$，$q=16$，所以

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=8^2+(-4)^3=0.$$

因而
$$y=z=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}=\sqrt[3]{8}=2.$$

代入(1)式，得到三个根为

$$x_1=-(2+2)=-4,\ x_2=-(2\omega+2\omega^2)=2,$$
$$x_3=-(2\omega^2+2\omega)=2.$$

容易验证，原三次方程的左端确实可分解为乘积 $(x+4)(x-2)^2$.

关于应用卡丹公式解三次方程，还有一些细致的问题需要讨论，但已超出本书话题，有兴趣者可参考关于高次方程的小册子，这里就不去说它了．

利用单位根不但可以解三次方程，还能解某些特殊形状的其它高次方程．

[例 2] 解方程：

$$x^8+x^6+x^4+x^2+1=0.$$

解法 1 将方程左端因式分解(第三节例 1)，化为

$$P(x)\cdot Q(x)=0,$$

这里
$$P(x)=x^4+x^3+x^2+x+1,$$
$$Q(x)=x^4-x^3+x^2-x+1.$$

当 $P(x)=0$，得到四个根

$$x_j=\varepsilon_j=\cos\frac{2j\pi}{5}+i\sin\frac{2j\pi}{5},\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

其中 ε_j 是五次虚单位根.

另一方面,由于

$$\begin{aligned}Q(-x)&=(-x)^4-(-x)^3+(-x)^2-(-x)+1\\&=x^4+x^3+x^2+x+1=P(x),\end{aligned}$$

所以 $$Q(-\varepsilon_j)=P(\varepsilon_j)=0.\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

因而当 $Q(x)=0$ 时得到另外四个解

$$x_j'=-x_j=-\varepsilon_j.\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

总之,得到原方程的八个解为

$$x=\pm\left(\cos\frac{2j\pi}{5}+i\sin\frac{2j\pi}{5}\right).\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

解法 2 令 $$x^2=y,$$

原方程化为 $$y^4+y^3+y^2+y+1=0.$$

由此得到它的四个根 y_j 为

$$y_j=\varepsilon_j=\cos\frac{2j\pi}{5}+i\sin\frac{2j\pi}{5},\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

式中 ε_j 为五次虚单位根. 将每个 y_j 开平方,得到原方程的八个根为

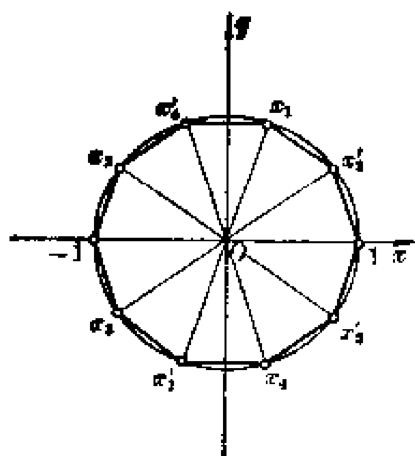
$$x_{\pm j}=\pm\left(\cos\frac{j\pi}{5}+i\sin\frac{j\pi}{5}\right).\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

注意,本例解法 1 的八个根与解法 2 的八个根,表达式似乎大不相同,其实完全一致,因为两者可以统一写成形状

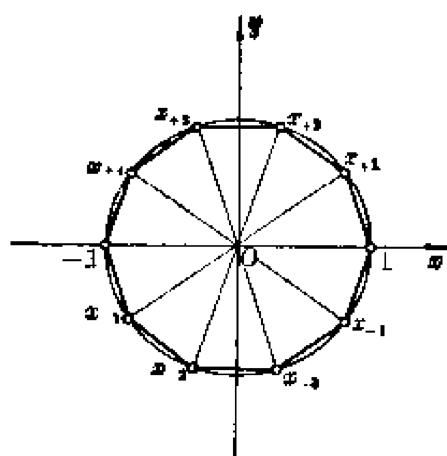
$$x=\cos\frac{2k\pi}{10}+i\sin\frac{2k\pi}{10}.\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9)$$

就是八个十次虚单位根(除 ±1 而外的十次单位根). 几何解释如图 2 所示.

[例 3] 求一个有理系数方程,使它的根等于 $\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7$



解法 1 的答案



解法 2 的答案

图 2

$+\alpha^9$，其中 α 是方程 $x^{13}-1=0$ 的根.

解 若 $\alpha=\varepsilon_0=1$，则

$$s=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^9=4,$$

所求方程为

$$y-4=0. \tag{1}$$

若 ε_k 为其余十二个 13 次单位根，k 取值 1 至 12，并且

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{13}+i\sin\frac{2k\pi}{13}.$$

再顺次以 $\alpha=\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{12}$ 代入和式

$$s=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^9,$$

结果只得到三个不同的 s 值，它们是：

当 $k=1,\ 5,\ 8,\ 12$ 时，得到

$$s_1=\varepsilon_4+\varepsilon_6+\varepsilon_7+\varepsilon_9;$$

当 $k=4,\ 6,\ 7,\ 9$ 时，得到

$$s_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11};$$

当 $k=2, 3, 10, 11$ 时，得到

$$s_3=\varepsilon_1+\varepsilon_5+\varepsilon_8+\varepsilon_{12}.$$

由第一节单位根性质 2 推论 5

$$\varepsilon_{13-k}=\overline{\varepsilon_k}, \quad (k=1, 2, \cdots, 12)$$

知道 s_1, s_2 和 s_3 都是实数，由所有 13 个十三次单位根的总和为 0，可得到

$$s_1+s_2+s_3=-1. \tag{2}$$

又根据单位根的性质，$\varepsilon_j\cdot\varepsilon_k=\varepsilon_{j+k}$，$\varepsilon_{13+k}=\varepsilon_k$，得到

$$\begin{aligned}s_1s_2&=(\varepsilon_4+\varepsilon_6+\varepsilon_7+\varepsilon_9)(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11})\\&=\varepsilon_6+\varepsilon_8+\varepsilon_9+\varepsilon_{11}+\varepsilon_7+\varepsilon_9+\varepsilon_{10}+\varepsilon_{12}\\&\quad+\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_6+\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_7\\&=(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_{12})+(\varepsilon_4+\varepsilon_6+\varepsilon_7+\varepsilon_9)\\&=-1+s_1.\end{aligned}$$

类似地得到　$s_2s_3=-1+s_2$,　$s_3s_1=-1+s_3$.

所以利用(2)式，得

$$s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1=-4. \tag{3}$$

进而　$s_1s_2s_3=(-1+s_1)s_3=-s_3+s_1s_3=-1$,

所以根据韦达定理，以 s_1, s_2, s_3 为根的方程是

$$y^3+y^2-4y+1=0. \tag{4}$$

总之，和式 s 共计可有四个不同的实数值，以这四个值为根的一个方程是

$$(y-4)(y^3+y^2-4y+1)=0. \tag{5}$$

说明：单独以 4 为根可作出有理系数方程(1)；以 s_1, s_2, s_3 为根可得有理系数方程(4)，以这四者为根得方程(5)．这三个方程都满足问题要求．但若以 s_1, s_2, s_3 三者中任何一个或两个为根，不能得到有理系数方程．

五、有关正三角形的证明题

用单位根来解几何题，特别是用来证某些有关正三角形的题目，显得很有成效.

先介绍用复数解几何题的某些一般法则.

熟知复数 $z=x+yi$ 可以直观地用平面上的点来表示. 表示方法是在平面上引进直角坐标系，并且横轴上的单位仍取为实数单位，纵轴上的单位取为虚数单位. 这时，平面上直角坐标为(x, y)的点 Z 就表示复数 $z=x+yi$(图 3). 当采取这种解释时，横轴叫做实轴，纵轴叫做虚轴，整个平面叫做复平面. 为了方便，复平面上的点可记为 $Z(z)$, $A(a)$等，这些记号的意思是 Z 是复平面上表示复数 z 的点，A 是复平面上表示复数 a 的点，等等. 在不致引起混淆时，甚至干脆把复数 z 与表示它的点当成一回事. 在这种表示下，点 z 关于 x 轴的对称点是点 $\bar{z}$，点 z 关于 O 的中心对称点是点 $-z$，等等(图 3).

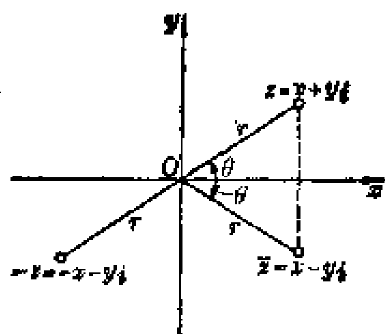


图 3

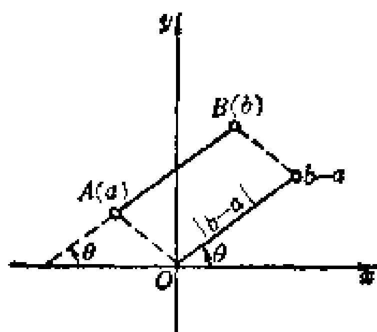


图 4

在普通坐标平面上，若设 x 轴是极轴，原点 O 是极点，则直角坐标为(x, y)的点也可用极坐标表示成(r, θ)，这时的极

半径 r，恰好就是点 $z=x+yi$ 的模，而极角 θ 则等于复数 z 的幅角，也就是说，z 可写成三角函数表达式

$$z=r(\cos\theta+i\cos\theta).$$

从 $A(a)$ 指向 $B(b)$ 的线段叫做有向线段 AB（图 4）. 复数 $b-a$ 的模 $|b-a|$ 等于线段 AB 的长度，而 $b-a$ 的幅角等于从实轴正方向旋转到 AB 方向所经过的角度.

由此立刻得到

法则 1 设 a, b 为不相等的复数，λ 为实数，并且

$$p=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}, \tag{1}$$

则 $P(p)$ 在点 $A(a)$ 和 $B(b)$ 决定的直线上，而且当 $\lambda>0$ 时 AP 与 PB 同向且 $\frac{AP}{PB}=\lambda$，当 $\lambda<0$ 时 AP 与 PB 反向且 $\frac{AP}{PB}=|\lambda|$. 特别，线段 AB 的中点 $M(m)$ 由下式决定：

$$m=\frac{1}{2}(a+b). \tag{2}$$

证明时只需注意(1)式等价于 $\frac{p-a}{b-p}=\lambda$（图 5）.

法则 2 如果点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ 满足

$$\frac{a-c}{c-b}=r(\cos\theta+i\sin\theta), \tag{3}$$

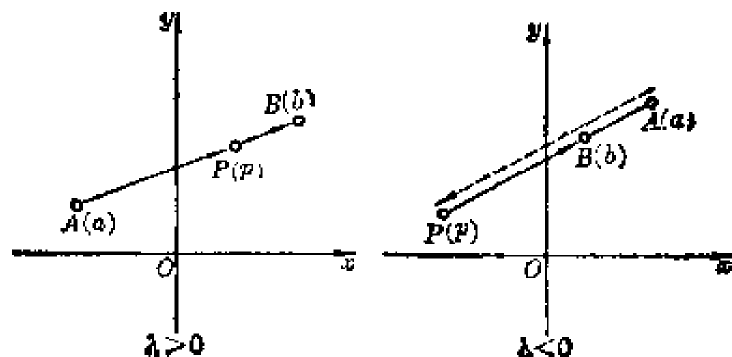


图 5

那末线段 CA 与 BC 长度之比为 r，且 $\angle BCA$ 的补角等于 θ：

$$\frac{CA}{BC}=r,\quad \angle BCA=\pi-\theta.$$

而且反过来也对(参考图 6)。

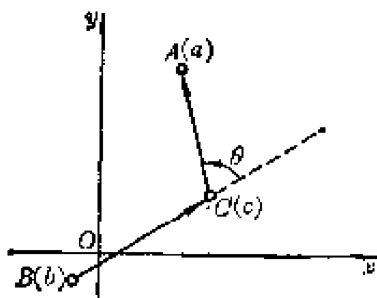


图 6

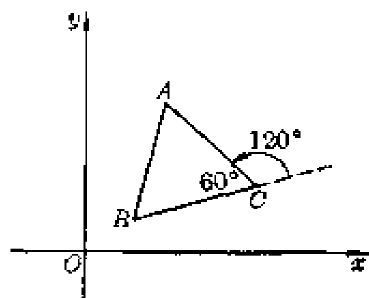


图 7

法则 3 若三点 $A(a)$，$B(b)$ 和 $C(c)$ 满足关系式

$$a+\omega b+\omega^2 c=0, \tag{4}$$

则 $\triangle ABC$ 是正三角形，并且沿三角形周界按 ABC 方向是逆时针的. 反过来，若 $\triangle ABC$ 是正三角形，并且 ABC 方向是逆时针的，则(4)式成立.

证 如图 7，若 $\triangle ABC$ 是逆时针走向的正三角形，则

$$\frac{CA}{BC}=1,$$

$$\angle BCA=\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{2\pi}{3}.$$

因而由法则 2，应有

$$\frac{a-c}{c-b}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\omega,$$

所以 $\quad a-c=\omega(c-b),\ a+\omega b-c(1+\omega)=0.$

而 $1+\omega+\omega^2=0$，所以推出(4)式，即

$$a+\omega b+\omega^2 c=0.$$

上列各步都是可逆的，因而从(4)式也能推出三角形 ABC 是

逆时针走向的正三角形，证完.

[例 1]　在复平面上已知点 $B(1)$，$C(2+i)$. 求以 BC 为一边的正三角形的第三个顶点.

解　本题 $b=1$，　$c=2+i$. 设点 $A(a)$ 使 ABC 为逆时针走向的正三角形，则由(4)式有

$$a=-\omega b-\omega^2c=-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 1$$

$$-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+i)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

又设点 $D(d)$ 使 $\triangle DCB$ 为逆时针走向的正三角形，则

$$d=-\omega c-\omega^2 b$$

$$=-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+i)-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 1$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

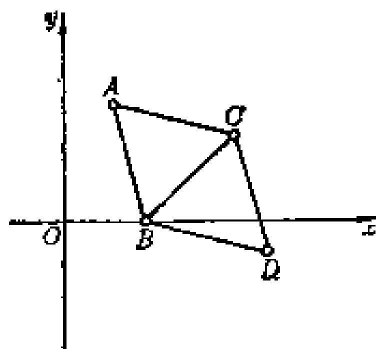


图 8

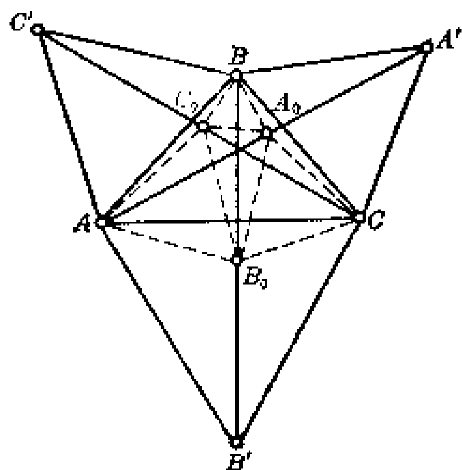


图 9

[例 2]　如图 9，在三角形 ABC 的三边上向形外作正三角形 BCA'，CAB'，ABC'. 设 A_0，B_0，C_0 分别是线段 AA'，

BB', CC' 的中点，求证 $\triangle A_0B_0C$, $\triangle B_0C_0A$ 和 $\triangle C_0A_0B$ 都是正三角形.

证 由于 BCA', CAB'、ABC' 都是具有相同走向的正三角形(图中为逆时针走向)，所以由法则 3，与它们的顶点对应的复数满足关系式

$$b+\omega c+\omega^2 a'=0, \tag{1}$$

$$c+\omega a+\omega^2 b'=0, \tag{2}$$

$$a+\omega b+\omega^2 c'=0. \tag{3}$$

将(3)式乘以 ω^2，并利用 $\omega^3=1$，得到

$$b+\omega c'+\omega^2 a=0. \tag{4}$$

将(1)式与(4)式相加，然后除以 2，得到

$$b+\omega\cdot\frac{c+c'}{2}+\omega^2\cdot\frac{a+a'}{2}=0. \tag{5}$$

又因为 A_0, B_0, C_0 分别是 AA', BB' 和 CC' 的中点，所以由法则 2，得到

$$a_0=\frac{a+a'}{2},\quad b_0=\frac{b+b'}{2},\quad c_0=\frac{c+c'}{2}.$$

所以(5)式化为

$$b+\omega c_0+\omega^2 a_0=0,$$

即 $\triangle C_0A_0B$ 是正三角形. 同理 $\triangle A_0B_0C$, $\triangle B_0C_0A$ 都是正三角形.

本例图形线条很多，如果从几何上考虑，觉得很难下手. 但是利用单位根来解就很简便，只要做一些运算，求出三角形三个顶点所对应的复数，然后验证它们确实满足法则 3 中的等式就行了.

[例 3] 如图 10，在 $\triangle ABC$ 的三边上向形外作正三角形 BCA_1, CAB_1, ABC_1. 设这三个正三角形的中心分别为 A_0,

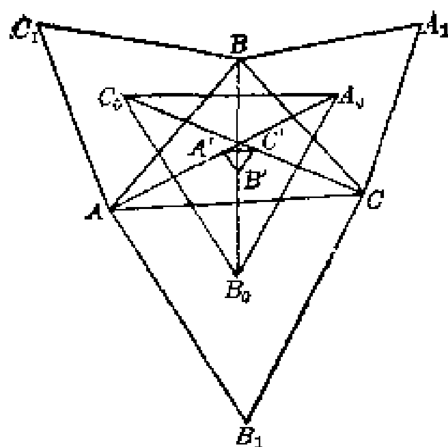


图 10

B_0, C_0, 又设线段 AA_0, BB_0, CC_0 的中点分别是 A', B', C'. 求证 $\triangle A_0B_0C_0$ 和 $\triangle A'B'C'$ 都是正三角形.

证 由法则 2 容易证明，正三角形的中心所对应的复数，等于三个顶点对应复数的算术平均值. 因而有

$$a_0=\frac{b+c+a_1}{3},\quad b_0=\frac{c+a+b_1}{3},\quad c_0=\frac{a+b+c_1}{3}.$$

所以 $3(a_0+\omega c_0+\omega^2 b_0)$

$$=b+c+a_1+\omega(a+b+c_1)+\omega^2(c+a+b_1)$$

$$=(a_1+\omega b+\omega^2 c)+(b+\omega c_1+\omega^2 a)+(c+\omega a+\omega^2 b_1).$$

但因 $\triangle A_1BC$, $\triangle BC_1A$ 和 $\triangle CAB_1$ 都是具有相同走向的正三角形，所以

$$a_1+\omega b+\omega^2 c=0, \tag{1}$$

$$b+\omega c_1+\omega^2 a=0, \tag{2}$$

$$c+\omega a+\omega^2 b_1=0. \tag{3}$$

由此推出 $\quad a_0+\omega c_0+\omega^2 b_0=0,$

所以 $\triangle A_0C_0B_0$ 是正三角形.

进而，由于 A', B', C' 分别是 AA_0, BB_0 和 CC_0 的中点，得到

$$a'=\frac{1}{2}\left[a+\frac{1}{3}\left(b+c+a_1\right)\right]=\frac{1}{6}(3a+b+c+a_1).$$

利用(1)式消去 a_1，得到

$$a'=\frac{1}{6}(3a+b+c-\omega b-\omega^2 c).$$

类似地可得 $$b'=\frac{1}{6}(3b+c+a-\omega c-\omega^2 a),$$

$$c'=\frac{1}{6}(3c+a+b-\omega a-\omega^2 b).$$

因而 $$6(a'+\omega b'+\omega^2 c')=3a+b+c-\omega b-\omega^2 c+\omega(3b+c+a)$$

$$-\omega^2 c-a+\omega^2(3c+a+b)-a-\omega b$$

$$=(a+b+c)(1+\omega+\omega^2)=0.$$

所以 $\triangle A'B'C'$ 也是正三角形，证完。

[例 4] 已知圆内接六边形 $ABCDEF$ 的边满足关系

$$AB=CD=EF=r,$$

r 为圆半径，又设 G，H，K 分别是边 BC，DE，FA 的中点，求证 $\triangle GHK$ 是正三角形。

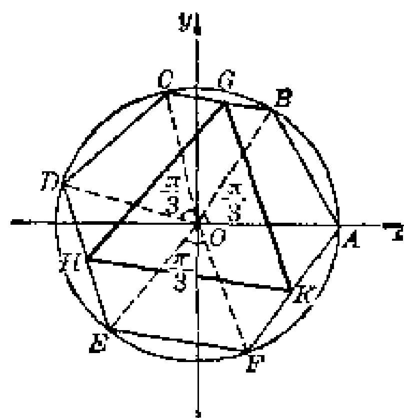


图 11

本题是 1979 年扬州地区数学竞赛的一条试题（原匈牙利数学竞赛题），这里介绍两种解法。

证法 1 本题结论显然与圆半径 r 的大小无关。为叙述简单起见，不妨令 $r=1$。因而可将已知圆取成复平面上的单位圆，并且使 A 点对应于复数 1。从条件

$$AB=CD=EF=r,$$

得到 $$\angle AOB=\angle COD=\angle EOF=\frac{\pi}{3}.$$

不妨假定顶点 A, B, C, D, E, F 在圆周上是按逆时针顺序排列的. 设 C 点和 E 点对应的复数是

$$c=\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad e=\cos\beta+i\sin\beta,$$

则点 B, D, F 对应的复数为

$$b=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\omega^2, d=-c\omega^2, f=-e\omega^2.$$

因而中点 $G(g)$, $H(h)$, $K(k)$ 由下列等式决定:

$$2g=b+c=-\omega^2+c,$$
$$2h=d+e=-c\omega^2+e,$$
$$2k=f+1=1-e\omega^2.$$

由此算出 $$2k\omega=\omega-e\omega^2\cdot\omega=\omega-e,$$
$$2g\omega^2=(-\omega^2+c)\omega^2=-\omega+c\omega^2.$$

利用这些表达式,立刻得到

$$2h+2k\omega+2g\omega^2=(-c\omega^2+e)+(\omega-e)+(-\omega+c\omega^2)=0.$$

即 $h+\omega k+\omega^2g=0$, 因而证得$\triangle HKG$ 是正三角形.

证法2 仍设圆半径为 1. 将圆心 O 与点 $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ 分别相连(图 12), 则 $\triangle OAB$ 为正三角形,

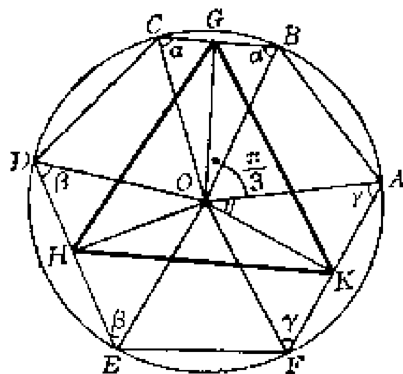


图 12

因而 $$\angle AOB=\frac{\pi}{3}.$$

又记 $\angle OBC=\alpha$, $\angle ODE=\beta$, $\angle OFA=\gamma$,

则 $$\angle OAF=\angle OFA=\gamma.$$

又因 G 是 BC 的中点，K 是 FA 的中点，得到

$$\angle BOG=\frac{\pi}{2}-\alpha,\quad \angle AOK=\frac{\pi}{2}-\gamma.$$

所以 $$\angle KOG=\angle KOA+\angle AOB+\angle BOG$$
$$=\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\gamma=\frac{4}{3}\pi-(\alpha+\gamma).$$

另一方面，计算六边形 $ABCDEF$ 的内角和，得到

$$2(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{\pi}{3}\cdot 6=(6-2)\pi,$$

因而

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi. \tag{1}$$

代入 $\angle KOG$ 的表达式，得

$$\angle KOG=\beta+\frac{\pi}{3}. \tag{2}$$

又从直角三角形 OBG 得到

$$OG=OB\cdot\sin\alpha=\sin\alpha.$$

从直角三角形 OAK 得到

$$OK=OA\cdot\sin\gamma=\sin\gamma.$$

在 $\triangle OGK$ 中，根据两边 OG, OK 及其夹角，利用余弦定律计算第三边，得到

$$GK^2=\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-2\sin\alpha\sin\gamma\cos\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right). \tag{3}$$

类似地得到

$$GH^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right). \tag{4}$$

又从(1)式得

$$\sin\alpha=\sin(\pi-\beta-\gamma)=\sin(\beta+\gamma). \tag{5}$$

将(4)式和(3)式相减，并利用(5)式，得

GH^2-GK^2

$=\sin^2\beta-\sin^2\gamma-2\sin\alpha\left[\sin\beta\cos\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\gamma\cos\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=(\sin^2\beta-\sin^2\gamma)-\sin\alpha\left[\sin\left(\beta+\gamma+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\beta-\gamma-\frac{\pi}{3}\right)\right.$

$\left.-\sin\left(\gamma+\beta+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\gamma-\beta-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=(\sin^2\beta-\sin^2\gamma)-\sin\alpha\cdot 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin(\beta-\gamma)$

$=\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(\beta-\gamma)$

$=0$. ①

所以得到 $$GH=GK.$$

同理可证 $GH=HK$，因而

$$GH=GK=HK,$$

所以三角形 GHK 是正三角形，证完.

下面我们还要利用法则 3 来讨论一个很别致的几何定理. 由于问题比较复杂，我们另列一节专门讨论这个定理.

六、莫雷定理

1899 年，F. 莫雷(Morley, 1860--1937)发现了一个有趣的初等几何定理：如图 13，若

$$\angle 1=\angle 2=\angle 3,\quad \angle 4=\angle 5=\angle 6,\quad \angle 7=\angle 8=\angle 9,$$

则 $\triangle PQT$ 是正三角形.

从角的顶点引出的两条射线，如果将角分成相等的三部

---

① 这里利用了 $\sin^2\beta-\sin^2\gamma=\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$ 这个三角恒等式. 不熟悉此恒等式者可试行推导.

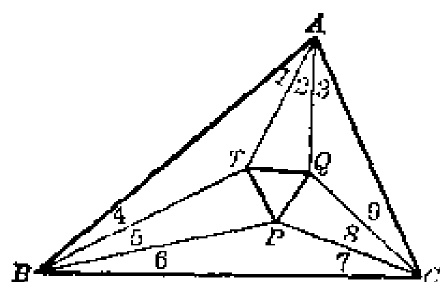


图 13

分，就叫做这个角的三等分角线．如图 13 中的 AQ 和 AT 就是 $\angle CAB$ 的三等分角线．而 AT、BT 叫做相邻的三等分角线．利用这样的术语，上述定理可以叙述成：

莫雷定理 任意三角形的内角的相邻三等分角线的三个交点是一个正三角形的顶点．

这个定理已经有了很多证法．这里介绍三种不同类型的证明方法：证法 1 是三角法，基本思路是算出三角形 PQT 三条边的长度，证明它们相等．证法 2 是几何法，基本思路是作一个正三角形出来，证明它与 $\triangle PQT$ 重合．证法 3 是代数法，基本想法是利用单位根和上节的法则 3.

证法 1 如图 13，在 $\triangle AQC$ 中，

$$\frac{AQ}{\sin\frac{C}{3}}=\frac{CA}{\sin\frac{C+A}{3}}.$$

但
$$\sin\frac{C+A}{3}=\sin\frac{\pi-B}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{B}{3}\right),$$

因而
$$AQ=\frac{CA\sin\frac{C}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{B}{3}\right)}=\frac{2R\sin B\sin\frac{C}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{B}{3}\right)},$$

R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径．因为有恒等式

$$\begin{aligned}\sin 3\varphi&=\sin\varphi(3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\\&=4\sin\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\right)\\&=4\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right),\end{aligned}$$

由此 $$AQ=8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin\frac{\pi+B}{3}.$$

类似地得到 $$AT=8R\sin\frac{C}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{\pi+C}{3}.$$

但 $$QT^2=AQ^2+AT^2-2AQ\cdot AT\cos\frac{A}{3},$$

所以

$$QT^2=64R^2\sin^2\frac{B}{3}\sin^2\frac{C}{3}\left[\sin^2\frac{\pi+B}{3}+\sin^2\frac{\pi+C}{3}\right.$$
$$\left.+2\sin\frac{\pi+B}{3}\sin\frac{\pi+C}{3}\cos\left(\pi-\frac{\pi-B-C}{3}\right)\right]$$
$$=64R^2\sin^2\frac{B}{3}\sin^2\frac{C}{3}\left(\sin^2\frac{\pi+B}{3}+\sin^2\frac{\pi+C}{3}\right.$$
$$\left.+2\sin\frac{\pi+B}{3}\sin\frac{\pi+C}{3}\cos\frac{2\pi+B+C}{3}\right).$$

利用恒等式 $$\sin^2u+\sin^2v+2\sin u\sin v\cos(u+v)$$
$$=\sin^2u+\sin^2v-2\sin u\sin v\cos(\pi-u-v)$$
$$=\sin^2(\pi-u-v)=\sin^2(u+v),$$

(其中借助余弦定律，考虑单位圆的一个内接三角形，其三个角为 u, v, $\pi-u-v$.)我们有

$$QT^2=64R^2\sin^2\frac{B}{3}\sin^2C\sin^2\frac{2\pi+B+C}{3},$$

$$QT=8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin\frac{2\pi+\pi-A}{3}.$$

所以 $$QT=8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin\frac{A}{3}.$$

利用循环置换，得到

$$QT=TP=PQ=8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin\frac{A}{3},$$

所以 $\triangle PQT$ 是正三角形，证完.

上面的三角证法，基本思路虽然简单，只要算出 $\triangle PQT$ 的三边，并且证明这三边的表达式相等，但是为了导出一个具有轮换形状的边长表达式，也费了不少周折．但是，三角证法兜的圈子，比起几何证法来，又是小巫见大巫了．因为如果用几何方法直接证明原来的命题非常困难，通常只能采取间接证法，绕一个很大的大圈子，才能达到所需的结论．下面介绍的证法，比较而言，在几何证法中算得上是简单易懂的一种了．它是文卡塔查连伽首先提出的．

证法2 如图14，设 ABC 为已知三角形．首先作 $\triangle P'BC$，使

$$\angle P'BC=\frac{2}{3}\angle ABC,\quad \angle P'CA=\frac{2}{3}\angle ACB,$$

并设 P 是 $\triangle P'BC$ 的内心．在 CP' 和 BP' 上分别确定点 Q 和 R，使

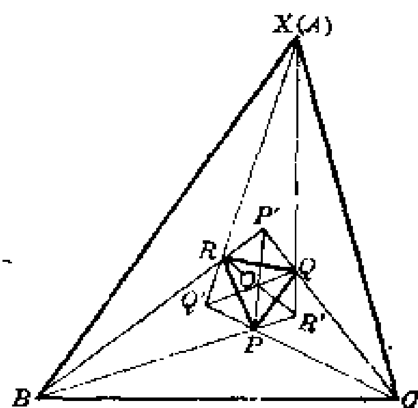


图 14

$$\angle P'PQ=\angle P'PR=\frac{\pi}{6}.$$

由此不难推出，$\triangle PQR$ 是正三角形．设 O 是 $\triangle PQR$ 的中心．分别引 QO 和 RO，对应地交 CP 延长线和 BP 延长线于点 Q' 和 R'，再设 $Q'R$ 与 QR' 两直线交于点 X．我们将证明 X 与 A 重合，并且 $\triangle PQR$ 是 $\triangle ABC$ 的“莫雷三角形”．

从图 14 看出，

$$\angle XRB=\angle P'RQ'=\angle P'RQ+\angle QRQ'$$
$$=\frac{\pi}{2}-\angle RP'O+\angle QPQ'$$
$$=\frac{\pi}{2}-\angle RP'O+\angle QPP'+\angle P'PQ'$$
$$=\frac{\pi}{2}-\angle RP'O+\frac{\pi}{6}+(\angle P'CP+\angle PP'C)$$
$$=\frac{2\pi}{3}+\frac{C}{3},$$

以及
$$\angle XR'B=2\angle RR'P=2\left(\pi-\frac{\pi}{6}-\angle RPR'\right)$$
$$=2\left[\frac{5\pi}{6}-\left(\frac{\pi}{6}+\angle P'PR'\right)\right]$$
$$=\frac{4\pi}{3}-2\left(\frac{B}{3}+\angle BP'P\right)$$
$$=\frac{4\pi}{3}-\frac{2B}{3}-\left(\pi-\frac{2B}{3}-\frac{2C}{3}\right)$$
$$=\frac{\pi}{3}+\frac{2C}{3}.$$

所以

$$\angle XRB=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\angle XR'B. \qquad (1)$$

因为 RR' 平分 $\angle XR'B$，从 (1) 式可知 R 是 $\triangle XR'B$ 的内心. 所以

$$\angle XBR=\frac{1}{3}\angle ABC, \quad \angle BXR=\angle RXR',$$

并且 X 在边 AB 上. 同理可证 Q 是 $\triangle XQ'C$ 的内心，因而

$$\angle XCQ=\frac{1}{2}\angle ACB,\quad \angle CXQ=\angle QXR,$$

并且 X 在 AC 上，因为 X 既在 AB 上，又在 AC 上，所以 X 与 A 重合．由此推出 AR, AQ 是 $\angle BAC$ 的三等分角线，并且 $\triangle PQR$ 是 $\triangle ABC$ 的"莫雷三角形"．前面又已证明 $\triangle PQR$ 是正三角形，因而定理得到完全的证明．

在证法 2 中，关键的一步是从(1)式和 RR' 平分 $\angle XR'B$ 推出 R 是 $\triangle XR'B$ 的内心．文卡塔查连伽的证明过程写得很精炼，写到这一步时，只是轻描淡写地一带而过．其实这一步不是很明显的，有兴趣的读者可作为练习题自己补出证明(参考本书末尾练习题第 2 题)．

在转入证法 3 以前，先介绍一个很有用的法则，它在利用复数解几何题时常被用到．将它补充到上一节的三个法则之后，编号为法则 4.

法则 4 设 $A(a)$，$B(b)$，$C(c)$，$D(d)$ 是复平面单位圆 $z\bar{z}=1$ 上的四个点，直线 AB 和 CD 交于点 $S(s)$，则

$$\bar{s}=\frac{a+b-c-d}{ab-cd}.$$

证 因为交点 S 在直线 AB 上，所以

$$\frac{s-a}{s-b}=\lambda \quad (\text{实数}). \tag{1}$$

又因为交点 S 也在直线 CD 上，所以

$$\frac{s-c}{s-d}=\mu \quad (\text{实数}). \tag{2}$$

由于 A, B, C, D 是单位圆上的四点，所以

$$a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}=d\bar{d}=1, \tag{3}$$

并且当交点 S 在圆内时 $\lambda<0$，$\mu<0$，当 S 在圆外时 $\lambda>0$，$\mu>0$．总之，λ 与 μ 同号．

又根据圆的性质，无论交点S在圆内或圆外，都有$SA\cdot SB=SC\cdot SD$，即

$$|s-a|\cdot|s-b|=|s-c|\cdot|s-d|. \tag{4}$$

但由(1)式得

$$|s-a|=\pm\lambda|s-b|=\pm\frac{s-a}{s-b}|s-b|, \tag{5}$$

由(2)式得

$$|s-c|=\pm\mu|s-d|=\pm\frac{s-c}{s-d}|s-d|, \tag{6}$$

将(5)式和(6)式代入(4)式，并注意λ与μ同号，

得到
$$\frac{s-a}{s-b}|s-b|^2=\frac{s-c}{s-d}|s-d|^2,$$

即
$$\frac{s-a}{s-b}\cdot(s-b)(\bar{s}-\bar{b})=\frac{s-c}{s-d}\cdot(s-d)(\bar{s}-\bar{d}),$$

$$(s-a)(\bar{s}-\bar{b})=(s-c)(\bar{s}-\bar{d}).$$

展开后化简，得

$$s(\bar{b}-\bar{d})+\bar{s}(a-c)=a\bar{b}-c\bar{d}. \tag{7}$$

(7)式取共轭，得

$$s(\bar{a}-\bar{c})+\bar{s}(b-d)=\bar{a}b-\bar{c}d. \tag{8}$$

我们来解(7)、(8)这两个方程以获得$\bar{s}$. 注意

$$\bar{a}=\frac{1}{a},\quad \bar{b}=\frac{1}{b},\quad \bar{c}=\frac{1}{c},\quad \bar{d}=\frac{1}{d}$$

等等。

$$\bar{s}=\frac{\begin{vmatrix}\bar{b}-\bar{d} & a\bar{b}-c\bar{d}\\ \bar{a}-\bar{c} & \bar{a}b-\bar{c}d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\bar{b}-\bar{d} & a-c\\ \bar{a}-\bar{c} & b-d\end{vmatrix}}=\frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

而其中

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= (\bar{b}-\bar{d})(\bar{a}b-\bar{c}d)-(a\bar{b}-c\bar{d})(\bar{a}-\bar{c}) \\
&= \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)-\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right) \\
&= \frac{(bc-ad)(d-b)}{abcd}-\frac{(ad-bc)(c-a)}{abcd} \\
&= \frac{(bc-ad)(d-b+a-c)}{abcd},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\bar{b}-\bar{d})(b-d)-(a-c)(\bar{a}-\bar{c}) \\
&= b\bar{b}-\bar{d}b-\bar{b}d+d\bar{d}-a\bar{a}+a\bar{c}+c\bar{a}-a\bar{c} \\
&= -\frac{b}{d}-\frac{d}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{ad-bc}{dc}+\frac{bc-ad}{ab} \\
&= \frac{(bc-ad)(dc-ab)}{abcd}.
\end{aligned}$$

所以最后得到

$$\bar{s}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{a+b-c-d}{ab-cd}.$$

必须注意，公式左端是 s 的共轭复数 $\bar{s}$，而右端的每个复数却都不带共轭记号.

法则 4 不但可应用于问题中包含圆周的情形，而且问题中本来没有圆时还可作一个辅助圆出来. 在证明莫雷定理时就是这样的.

现在回到莫雷定理的证明.

证法 3 作 $\triangle ABC$ 的外接圆，并将它取成单位圆 $z\bar{z}=1$. 又令 $a=\beta^3$, $b=\beta^3\gamma^3$, $c=\alpha^3\beta^3\gamma^3=1$(图 15). 这时，点 β, β^2 将 $\overset{\frown}{CA}$ 三等分，因而这两点与 B 点的连线是 $\angle ABC$ 的三等分角线. 同样地，点 $\beta^3\gamma$, $\beta^3\gamma^2$ 与 C 点的连线是 $\angle BCA$ 的三等分角线；点 $\alpha\beta^3\gamma^3$, $\alpha^2\beta^3\gamma^3$ 与 A 点的连线是 $\angle CAB$ 的三等分角线. 因而，设 P, Q, R 对应的复数为 p, q, r, 则由法则 4,

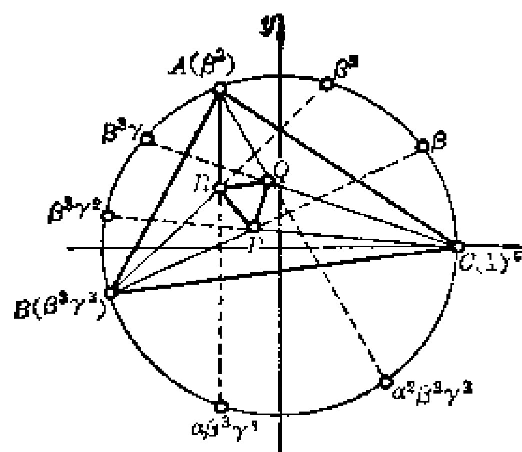


图 15

并且注意 $\alpha^3\beta^3\gamma^3=1$，得到

$$\bar{p}=\frac{1+\beta^3\gamma^2-\beta-\beta^3\gamma^3}{\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^3}$$

$$=\frac{(1-\beta^3\gamma^3)-\beta(1-\beta^2\gamma^2)}{\beta^3\gamma^2(1-\beta\gamma)}\cdot\alpha^3\beta^3\gamma^3$$

$$=[(1+\beta\gamma+\beta^2\gamma^2)-\beta(1+\beta\gamma)]\alpha^3\gamma;$$

$$\bar{q}=\frac{\alpha^3\beta^3\gamma^3+\beta^3\gamma-\beta^3-\alpha^2\beta^3\gamma^3}{\beta^3\gamma-\alpha^2\beta^6\gamma^3}$$

$$=\frac{\beta^3(\alpha^3\gamma^3+\gamma-1-\alpha^2\gamma^3)}{\beta^3(\gamma-\alpha^2\beta^3\gamma^3)}\cdot\frac{\alpha}{\alpha}$$

$$=\frac{(\alpha^3\gamma^3-1)-\gamma(\alpha^2\gamma^2-1)}{\alpha\gamma-1}\cdot\alpha$$

$$=\alpha[(\alpha^2\gamma^2+\alpha\gamma+1)-\gamma(\alpha\gamma+1)]$$

$$\bar{r}=\frac{\beta^2+\beta^3\gamma^3-\beta^3-\alpha\beta^3\gamma^3}{\beta^5\gamma^3-\alpha\beta^6\gamma^3}$$

$$=\frac{\beta^2(\alpha^3\beta^3\gamma^3+\beta\gamma^3-\alpha^3\beta^4\gamma^3-\alpha\beta\gamma^3)}{\beta^5\gamma^3(1-\alpha\beta)}\cdot\alpha^3\beta^3\gamma^3$$

$$=\frac{\beta\gamma^3(1-\alpha^3\beta^3)-\alpha\beta\gamma^3(1-\alpha^2\beta^2)}{1-\alpha\beta}\cdot\alpha^3$$

$$=\alpha^3\beta\gamma^3[(1+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2)-\alpha(1+\alpha\beta)].$$

注意到 $\alpha\beta\gamma=\omega$,

ω 是三次虚单位根，我们有

$$\bar{p}+\bar{\omega}\bar{q}+\bar{\omega}^2\bar{r}=\bar{p}+\omega^2\bar{q}+\omega\bar{r}=\bar{p}+\alpha^2\beta^2\gamma^2\bar{q}+\alpha\beta\gamma\bar{r}$$
$$=\alpha^3\gamma(1+\beta\gamma+\beta^2\gamma^2-\beta-\beta^2\gamma)$$
$$+\alpha^3\beta^2\gamma^2(\alpha^2\gamma^2+\alpha\gamma+1-\alpha\gamma^2-\gamma)$$
$$+\alpha^4\beta^2\gamma^4(1+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha-\alpha^2\beta)$$
$$=\alpha^2\gamma(\alpha\beta\gamma+\alpha^2\beta^2\gamma^2+1)=\alpha^2\gamma(\omega+\omega^2+1)=0.$$

取共轭，得到 $p+\omega q+\omega^2 r=0$,

所以由法则 3, 知道 $\triangle PQR$是 正三角形，证完.

注意，从证法 3 的证明过程看出，关键在于 $\alpha\beta\gamma$ 是三次虚单位根. 如果把证明过程中的 β 全部换成 β_1, 使 $\beta_1=\omega\beta$, 则

$$\alpha\beta_1\gamma=\alpha\beta\gamma\cdot\omega=\omega^2,$$

即 $\alpha\beta_1\gamma$ 仍然是三次复单位根，同时将条件中角 ABC 的三等分角线换成点 $B(\beta_1^3\gamma^3)$ 分别与点 β_1, β_1^2 的连线(图 16), 其余不变，则点 P, Q, R 的表达式仍然有效(β 换成 β_1), 并且仍有

$$\bar{p}+\alpha^2\beta_1^2\gamma^2\bar{q}+\alpha\beta_1\gamma\bar{r}=0,$$

即 $\bar{p}+\omega\bar{q}+\omega^2\bar{r}=0$,

因而 $p+\omega r+\omega^2 q=0$,

所以这时得到的 $\triangle PQR$ 也是正三角形(图 16).

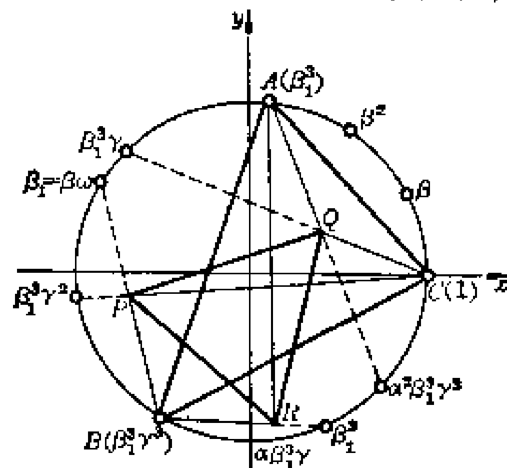


图 16

一般地，可以将 α, β, γ 各乘上一个三次单位根(1, ω 或 ω^2), 得到 α_1, β_1, γ_1, 使

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1\neq 1,$$

则仍有 $$\alpha_1^3\beta_1^3\gamma_1^3=1$$

和 $$1+\alpha_1\beta_1\gamma_1+\alpha_1^2\beta_1^2\gamma_1^2=0,$$

结果，证法 3 的论证过程仍能搬用过来，因而得到的新三角形 PQR 还是正三角形．由于 α_1 可有三种不同情况（等于 α，$\alpha\omega$ 或 $\alpha\omega^2$），β_1 和 γ_1 也各有三种类似的不同情况，三者搭配共有 27 种不同情况，其中剔除乘积 $\alpha_1\beta_1\gamma_1=1$ 的 9 种情况，最后得到 18 种不同情况．由此可见，采用证法 3，不但证明了莫雷定理所断言的正三角形，而且一举发现了 18 个正三角形．

七、单 位 根 群

在小学和中学数学里，我们学习、讨论过各种各样的数，如整数、有理数、实数、复数等等，还学过这些数的运算律，如交换律、结合律、分配律等等，不过这些运算律并不是学习的重点．

在近代数学里，我们仍旧要研究这些数，但是把这些数分别作为一个数的系统来研究的，而且运算律也成为研究的重点．在所研究的运算性质中，有一条是我们经常遇到但中小学教材尚未介绍其名称的，就是运算的*封闭性*．

什么叫封闭性呢？形象地说，就是在某个集合中可以关起门来进行某种运算．例如，在有理数集中，任两个数间可进行加、减、乘、除（0 不做除数）运算，其运算结果仍在有理数集中．这就称为有理数集对加、减、乘、除（0 不做除数）分别封闭．显然封闭性是相对于数集和运算而言的．例如自然数集对加法封闭，对减法却不封闭了——如 $1-2$ 的结果就不是自然数．但到了整数集中，对加、减法就都封闭了．

以数的系统而言，我们学习过的自然数系，有理数系，实数系，复数系等，都是一些包含无限多个数的数系.

在这本小册子里我们研究的主要对象——全体 n 次单位根，虽然只有

$$1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{n-1}$$

这 n 个不同的值，但如果我们只着眼于它们之间的乘法时，却也构成了一个数的系统. 并且在这个系统中，乘法运算满足以下性质：

1. 封闭性 任意两个 n 次单位根的乘积仍然是一个(确定的) n 次单位根. 这是因为

$$\varepsilon_j \cdot \varepsilon_k = \varepsilon_{j+k} \quad (\text{第一节性质 } 2).$$

2. 结合律 设 ε_j，ε_k，ε_l 是任意三个（可以相同的）n 次单位根，则有等式：

$$(\varepsilon_j \cdot \varepsilon_k) \cdot \varepsilon_l = \varepsilon_j \cdot (\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l).$$

3. 恒等元 在这个数系中存在一个特殊的 n 次单位根 $\varepsilon_0(=1)$，用它去乘任何一个 n 次单位根 ε_j 仍得到 ε_j：

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_j = \varepsilon_j \cdot \varepsilon_0 = \varepsilon_j.$$

具有这样的性质的 ε_0 叫做*恒等元*.

4. 逆元 对于任何一个 n 次单位根 ε_j，存在一个 n 次单位根与 ε_j 乘积为 ε_0，这个 n 次单位根叫做 ε_j 的*逆元*，记作 ε_j^{-1}. 即

$$\varepsilon_j^{-1} \cdot \varepsilon_j = \varepsilon_j \cdot \varepsilon_j^{-1} = \varepsilon_0.$$

ε_j^{-1} 的存在由第一节性质 2 即可知道.

如果一个集合对于某种运算满足上列四条性质，就说这个集合对于所说的运算构成一个*群*.

因此，全体 n 次单位根对于复数中的乘法构成一个群. 这个群叫做 *n 次单位根群*.

容易看出，全体非 0 有理数对乘法也构成群．但全体非 0 整数对乘法却不构成群，这主要是因为并不能保证每个整数都有逆元．

除此之外，n 次单位根群还满足

5．交换律 对于任意两个 n 次单位根 ε_j 和 ε_k，都有

$$\varepsilon_j \cdot \varepsilon_k = \varepsilon_k \cdot \varepsilon_j.$$

应该指出，在构成群的条件中并没有交换律这一条，而且也确实大量存在着不满足交换律的群．如果一个群还满足交换律，就被称为*交换群*或*阿贝耳群*．后面这个名称，是为了纪念对群论和其他数学分支都有重大贡献的挪威数学家阿贝尔(N. H. Abel, 1802—1829)．

应用这个术语，我们知道 n 次单位根群是交换群．

不但如此，n 次单位根群还有一个非常重要的性质，就是存在着 n 次原根．取定一个 n 次原根后，每个 n 次单位根都可表示成这个 n 次原根的某一方幂．

一般地，在一个群 G 中，将元素 α 自乘 m 次，所得到的元素称为 α 的 m 次幂，记为 α^m．如果群 G 的所有元素都可表示成某个元素 α 的幂，群 G 就叫做*循环群*，元素 α 叫做这个群的*生成元*．循环群一定是交换群．

因此，n 次单位根群是循环群，并且每个 n 次原根都是群的一个生成元．

那么，n 次单位根群中哪些可以成为原根即生成元呢？这是第一节中提出的问题．我们现在来解决它．先叙述一些关于整除性的术语．

一个大于 1 的自然数，如果除去 1 和这个数自己而外，没有其它任何约数，就说这个数是*素数*，又叫做*质数*．如果两个整数的最大公约数是 1，就说这两个整数*互素*．我们有

性质 设 ε_k 是一个 n 次单位根，其中 k 为整数，则 ε_k 是 n 次单位原根的充分必要条件是 k 与 n 互素.

证 1) 若 k 与 n 互素，则下列 n 个数

$$k,\ 2k,\ \cdots,\ nk$$

被 n 除后的余数必定互不相同. 这是因为如果有 h, l 使得 $1\leqslant h<l\leqslant n$, 且 hk 与 lk 被 n 除后余数相同，则 $lk-hk$ 是 n 的倍数. 但

$$lk-hk=(l-h)k$$

中 k 与 n 互素，$l-h$ 又是大于 0 小于 n, 当然不能被 n 整除，从而 $(l-h)k$ 不可能是 n 的倍数，与原设矛盾. 根据性质 2 的推论，

$$\varepsilon_k,\ \varepsilon_{2k},\ \varepsilon_{3k},\ \cdots,\ \varepsilon_{nk}$$

互不相同，即恰恰构成了全部 n 次单位根. 但这 n 个数又可写成

$$\varepsilon_k,\ \varepsilon_k^2,\ \varepsilon_k^3,\ \cdots,\ \varepsilon_k^n$$

所以这时 ε_k 确为 n 次原根.

2) 若 k 与 n 不互素，则 ε_k 的各次方幂

$$\varepsilon_k,\ \varepsilon_k^2,\ \cdots,\ \varepsilon_k^n$$

中不可能互不相同，从而 ε_k 不是 n 次原根. 这是因为 k、n 不互素即它们的最大公约数 $d>1$, 于是可设

$$n=md,\ k=ld.$$

则
$$\varepsilon_k^m=\varepsilon_{ld}^m=(\varepsilon_l^d)^m=\varepsilon_l^{md}=\varepsilon_l^n=1.$$

即至少有 ε_k^m 和 ε_k^n 相等(都为 1).

由这个性质不难得到

推论 当 p 是素数时，任何一个不等于 1 的 p 次单位根 ε_k 都是 p 次原根.

$\varepsilon_k\neq1$ 相当于 k 不是 p 的倍数. 而当 p 是素数时，任何 k

若不是 p 的倍数就一定与 p 互素.

现在我们可以知道，为什么 ω, ω^2 都是三次单位原根，这是因为 3 是素数，ω、ω^2 是不等于 1 的所有单位根.

同样在五次单位根中，因为 5 是素数，所以所有虚单位根都是原根. 在六次单位根中，与 6 互素的是 1, 5. 所以只有 ε_1、ε_5 是原根. 读者不妨验证一下 ε_5 的各个方幂是否构成了六次单位根群.

在这本小册子中，我们已经从单位根出发一直谈到了群的概念. 概括地说，群是对一种满足结合律的运算及其逆运算都封闭的集合. 正因为只考虑一种运算，所以群是现代数学中一种基本的代数结构. 当然，光有一种运算往往不够. 本书第二、三、四节或多或少地都与多项式有关，多项式就不仅有加法，而且还有乘法. 一般地说，如果一个集合 R 对于两种运算——不妨就称为加法与乘法——都封闭，而且 R 关于加法成交换群，加法与乘法之间又有如下的分配律联系:

$$a(x+y)=ax+ay, \quad (x+y)b=xb+yb.$$

则 R 就称为一个环. 多项式就构成一个环. 特别注意，环 R 中并没有要求对乘法也可逆. 如果环 R 中的任何非零元素都可逆，则这个环就称为一个体. 还要注意，体和环一样，并没有要求乘法一定交换，如果体中的乘法可交换，就称为是域. 有理数集、实数集、复数集就分别都是域. 群、环、体(域)构成了近世代数学习的第一个阶梯. 利用群、环、域的理论，解决了象尺规三等分角不可能性，五次以上代数方程根式解的不可能这样的古典难题. 由于许多变换构成了群，而且平面(或三维空间)又可赋以坐标系而使得点和一对(或三个)域中的数对应起来，这些代数理论同时也渗透进了几何学.

总之，在本书中，我们看到的一些初等数学问题，表面上

似乎彼此缺少联系，实际上都以不同方式和单位根联系着，由此可见，即使局限于初等数学的范围，单位根的性质及其应用也很丰富多采．如果仔细分析一下问题的实质，就会发现不少是与群、环、域等一般代数系统有深刻联系的，这又启示我们去从新的高度来获得新的知识．正是：

欲穷千里目，更上一层楼．

我们这本《从单位根谈起》，就谈到这里为止吧！

练　习　题

1. 求 $\sin 18°$.（参考第一节例 4）

2. 已知 M 是 $\triangle ABC$ 内 $\angle A$ 平分线上的一点，并且

$$\angle BMC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC,$$

求证 M 是 $\triangle ABC$ 的内心.（参考第六节莫雷定理证法 2）

3. 知道了 β 是复方根 $\sqrt[n]{\alpha}$ 的一个值，试写出 $\sqrt[n]{\alpha}$ 的所有的值.

4. 设 n 为已知自然数，求满足条件 $\bar{x} = x^{n-1}$ 的所有复数.

5. 设 ω 是三次虚单位根，计算：

1) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$;

2) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)$;

3) $(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)$;

4) $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$;

5) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$.

6. 设 $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，求证

$$(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1}) = n.$$

7. 设 ε 是 $2n$ 次本原单位根，计算：

$$S = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}.$$

8. 试求所有 n 次单位根的 k 次幂之和.

9. 设 ε 为 n 次单位根，求和：

$$S = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1};$$

$$T = \varepsilon + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3 + \cdots + (n-1)\varepsilon^{n-1}.$$

10. 求和：

$$A=\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n};$$

$$B=\sin\frac{2\pi}{n}+2\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

11. 求证：

$$z^{2m}-1=(z^2-1)\prod_{r=1}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{r}{m}\pi+1\right);$$

$$z^{2m+1}-1=(z-1)\prod_{r=1}^{m}\left(z^2-2z\cos\frac{2r\pi}{2m+1}+1\right);$$

$$z^{2m}+1=\prod_{r=0}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{2r+1}{2m}\pi+1\right);$$

$$z^{2m+1}+1=(z+1)\prod_{r=0}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{2r+1}{2m+1}\pi+1\right).$$

12. 求证：1) $\sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{2\pi}{2m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$;

2) $\sin\frac{\pi}{2m+1}\sin\frac{2\pi}{2m+1}\cdots\sin\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$.

13. 分解因式：

$$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3,$$

其中 ω 是三次虚单位根。

14. 若 $|a|=1$, $|b|=1$, $a+b+1=0$, 证明 a 和 b 是 1 的两个三次虚根.

15. 求证：

$$C_n^1+C_n^4+C_n^7+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-2}{3}\pi\right),$$

$$C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-4}{3}\pi\right).$$

16. 求证 $x^{1979}+x^{1989}+x^{1999}$ 被 $x^7+x^8+x^9$ 整除.

17. 求证：$x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{5555}+x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1$ 能被 $x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ 整除.

18. 求 $x^{1978}+x^{9781}+x^{7819}+x^{8197}$ 被多项式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 被所

得的余式.

19. 为了使多项式$(x+1)^m+x^m+1$被x^2+x+1整除，自然数m应满足什么条件？

20. 求$x^{2000}-1$被$x^4+x^3+2x^2+x+1$除得的余式.

21. 已知多项式$P(x)$和$Q(x)$满足

$$P(x^3)+xQ(x^3)=(x^2+x+1)S(x),$$

求证$P(x)$和$Q(x)$都包含$x-1$的因式.

22. 分解因式：$x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1$.

23. 解方程：

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)=3.$$

24. 已知正三角形ABC和一点M. 求证三条线段MA，MB和MC中，每一条都不大于另两条之和. 当且仅当M点在$\triangle ABC$的外接圆上，三线段MA，MB和MC中才有一条等于另两条之和.

练习题解法概要

1. 从$\sin 36°=\cos 54°$，得

$$2\sin 18°\cos 18°=4\cos^3 18°-3\cos 18°,$$

由$\cos 18°\neq 0$，得

$$2\sin 18°=4\cos^2 18°-3,$$

即

$$2\sin 18°=4(1-\sin^2 18°)-3,$$

$$4\sin^2 18°+2\sin 18°-1=0,$$

令$\sin 18°=t$，解此二次方程得

$$t=\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{5}).$$

但$\sin 18°>0$，负根应弃去，所以

$$\sin 18°=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

2. 设I是$\triangle ABC$的内心，则从$\triangle IBC$得到

$$\angle BIC=\pi-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}=\angle BMC,$$

所以 I 和 M 在以 BC 为弦的同一段弓形弧上．I 和 M 又都在 $\angle A$ 的平分线上，因而两点重合，即 M 是 $\triangle ABC$ 的内心．

3．答：$\varepsilon_k\beta$，其中 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$．

4．若 $n=1$，则 $x=1$．

若 $n=2$，条件化为 $\bar{x}=x$，x 为一切实数．

若 $n>2$，$x=0$ 显然是一解．当 $x\neq 0$ 时，条件化为

$$x\bar{x}=x^n.$$

令 $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，可得

$$r^{n-2}=1, \quad \sin n\theta=0.$$

由此可知 x 必为 n 次单位根 ε_k．

5．由于 $\omega^3=1$，$\omega+\omega^2=-1$，有

1) 原式 $=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)=(1-\omega-\omega^2+1)^2=3^2=9$；

2) 原式 $=1-(\omega-\omega^2)^2=1-(\omega^2-2+\omega)=1-(-2-1)=4$．

3) 原式 $=a^2\omega^3+b^3\omega^3+ab(\omega^2+\omega^4)=a+b+ab(\omega+\omega^2)=a+b-ab$．

4) 原式 $=a^3+b^3$．

5) 原式 $=(a+b\omega-c-c\omega)(a+b\omega^2-c-c\omega^2)$

$$\begin{aligned}&=[(a-c)+\omega(b-c)][(a-c)+\omega^2(b-c)]\\&=(a-c)^2+\omega^2(b-c)^2+(a-c)(b-c)(\omega+\omega^2)\\&=a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2-ab-c^2+ac+bc\\&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac.\end{aligned}$$

6．由于

$$\begin{aligned}&(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})\\&\quad=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1,\end{aligned}$$

令 $x=1$，就得到

$$(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1})=n.$$

7．由于 ε 是 $2n$ 次本原单位根，所以

$$\varepsilon^{2n}=1, \quad \varepsilon^n\neq 1.$$

但是 $(\varepsilon^n)^2=\varepsilon^{2n}=1$，所以只能是

$$\varepsilon^n=-1.$$

由此得到
$$S=1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}=\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}=\frac{2}{1-\varepsilon}.$$

8．这就是第一节的性质 3．

9．先设 $\varepsilon\neq 1$．这时由表达式

$$S=1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\cdots+n\varepsilon^{n-1}, \tag{1}$$

两边同乘以 ε，注意 $\varepsilon^n=1$，得

$$\varepsilon S=\varepsilon+2\varepsilon^2+3\varepsilon^3+\cdots+(n-1)\varepsilon^{n-1}+n. \qquad (2)$$

从(1)式减去(2)式，得

$$(1-\varepsilon)S=1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}-n=-n,$$

所以

$$S=\frac{n}{\varepsilon-1}. \qquad (3)$$

又从(2)式和(3)式得

$$T=\varepsilon+2\varepsilon^2+\cdots+(n-1)\varepsilon^{n-1}=\varepsilon S-n=\frac{\varepsilon n}{\varepsilon-1}-n=\frac{n}{\varepsilon-1}.$$

如果 $\varepsilon=1$，那末

$$S=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$T=1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

注意：

$$S-T=1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}=\begin{cases}0, & 若\ \varepsilon\neq1;\\ n, & 若\ \varepsilon=1.\end{cases}$$

10. 由上题知道，若

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}, \qquad (1)$$

则

$$\varepsilon+2\varepsilon^2+\cdots+(n-1)\varepsilon^{n-1}=\frac{n}{\varepsilon-1} \qquad (2)$$

由于
$$\frac{n}{\varepsilon-1}=\frac{n}{\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}-1}=\frac{n\left(\cos\frac{2\pi}{n}-1-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\cos\frac{2\pi}{n}-1\right)^2+\sin^2\frac{2\pi}{n}}$$

$$=\frac{n\left(\cos\frac{2\pi}{n}-1-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}=-\frac{n}{2}\left(1+i\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right).$$

代入(2)式右端，并将(2)式左端的 ε 用(1)式代入，应用棣美弗公式，然后分别考察实部和虚部，便得

$$A=\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-\frac{n}{2},$$

$$B=\sin\frac{2\pi}{n}+2\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+(n-1)\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=-\frac{n}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

11. 设

$$e_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

则 $$e_{n-k}=\bar{e}_k=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

因而 $$(z-e_k)(z-e_{n-k})=z^2-2z\cos\frac{2k\pi}{n}+1.$$

令 $n=2m$，得

$$\begin{aligned}z^{2m}-1&=(z-1)(z-e_1)(z-e_2)\cdots(z-e_{m-1})(z+1)\times\\&\quad\times(z-e_{m+1})\cdots(z-e_{2m-1})\\&=(z-1)(z+1)(z-e_1)(z-e_{2m-1})\cdots(z-e_{m-1})(z-e_{m+1})\\&=(z^2-1)\left(z^2-2z\cos\frac{\pi}{m}+1\right)\cdots\left(z^2-2z\cos\frac{m-1}{m}\pi+1\right).\end{aligned}$$

而当 $n=2m+1$ 时，则得到

$$\begin{aligned}z^{2m+1}-1&=(z-1)(z-e_1)(z-e_2)\cdots(z-e_{2m})\\&=(z-1)(z-e_1)(z-e_{2m})\cdots(z-e_m)(z-e_{m+1})\\&=(z-1)\left(z^2-2z\cos\frac{2\pi}{2m+1}+1\right)\cdots\left(z^2-2z\cos\frac{2m\pi}{2m+1}+1\right).\end{aligned}$$

当 $n=4m$ 时，利用 $z^{2l}-1$ 的分解式，$l=2m$，得：

$$\begin{aligned}z^{4m}-1&=(z^2-1)\prod_{r=1}^{4m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{r\pi}{2m}+1\right)\\&=(z^2-1)\prod_{j=1}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{2j\pi}{2m}+1\right)\cdot\prod_{k=0}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{2k+1}{2m}\pi+1\right)\\&=(z^{2m}-1)\cdot\prod_{k=0}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{2k+1}{2m}\pi+1\right).\end{aligned}$$

而 $$z^{4m}-1=(z^{2m}-1)(z^{2m}+1).$$

所以得到 $$z^{2m}+1=\prod_{k=0}^{m-1}\left(z^2-2z\cos\frac{2k+1}{2m}\pi+1\right).$$

类似地取 $z=4m+2$ 可得 $z^{2m+1}+1$ 的分解式.

12. 在 11 题 1), 2)中两边除以 z^2-1 或 $z-1$ 后令 $z=1$.

13. $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$

$$\begin{aligned}&=[(a-c)+\omega(b-c)]^3+[(a-c)+\omega^2(b-c)]^3\\&=2(a-c)^3+3(a-c)^2(b-c)(\omega+\omega^2)\\&\quad+3(a-c)(b-c)^2(\omega^2+\omega)+2(b-c)^3\\&=2[(a-c)+(b-c)][(a-c)^2-(a-c)(b-c)+(b-c)^2]\\&\quad-3(a-c)(b-c)[(a-c)+(b-c)]\end{aligned}$$

$$=(a+b-2c)[2(a-c)^2-5(a-c)(b-c)+2(b-c)^2]$$
$$=(a+b-2c)[2(a-c)-(b-c)][(a-c)-2(b-c)]$$
$$=(a+b-2c)(2a-b-c)(a+c-2b).$$

14. 由于 a 和 b 的模都等于 1，故可设

$$a=\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad b=\cos\beta+i\sin\beta.$$

由条件 $$a+b+1=0,$$

分离实部和虚部，得

$$\sin\alpha+\sin\beta=0, \tag{1}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta+1=0. \tag{2}$$

由 (1) 式得

$$\alpha=-\beta+2m\pi \tag{3}$$

或

$$\alpha=2(m+1)\pi+\beta. \tag{4}$$

但 (4) 式与 (2) 式矛盾，此解应弃去. 将 (3) 式代入 (2) 式得

$$\cos\alpha=\cos\beta=-\frac{1}{2}.$$

因而 $\sin\alpha$ 和 $\sin\beta$ 分别等于 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 a 和 b 是 1 的两个三次虚根.

15. 利用二项式定理，得到

$$(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+1, \tag{1}$$
$$(1+\omega)^n=1+C_n^1\omega+C_n^2\omega^2+C_n^3+C_n^4\omega+\cdots \tag{2}$$
$$(1+\omega^2)^n=1+C_n^1\omega^2+C_n^2\omega+C_n^3+C_n^4\omega^2+\cdots \tag{3}$$

与例题 7 类似，将 (2) 式乘以 ω^2，(3) 式乘以 ω，所得两式与 (1) 式相加再除以 3，可得

$$C_n^1+C_n^4+C_n^7+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-2}{3}\pi\right).$$

而若将 (2) 式乘以 ω，(3) 式乘以 ω^2，再与 (1) 式相加，可得

$$C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-4}{3}\pi\right).$$

16. 原式 $=x^{1979}(1+x^{10}+x^{20})$，既能被 x^7 整除，又能被 $1+x+x^2$ 整除，因而被 $x^7(1+x+x^2)$ 整除.

17. 用第二节法则 4 的推论，把十次单位根代入.

18. 设被除式为 $f(x)$，并设 e_k 是任一个五次虚单位根，则 $e_k^5=1$，因而

$$f(e_k)=e_k^{1978}+e_k^{9781}+e_k^{7819}+e_k^{8197}=e_k^3+e_k+e_k^4+e_k^2$$
$$=(e_k^3+e_k+e_k^4+e_k^2+1)-1=-1.$$

可见 $f(x)+1$ 能被 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 整除，因而 $f(x)$ 被除得的余式为 -1.

19. 设原式为 $f(x)$，则

$$f(\omega)=(\omega+1)^m+\omega^m+1=(-\omega^2)^m+\omega^m+1=(-1)^m\omega^{2m}+\omega^m+1.$$

若 m 是 3 的倍数，则 $\omega^m=\omega^{2m}=1$，因而 $f(\omega)$ 为 1 或 3，都不为 0. 若 m 不是 3 的倍数，即 m 具有 $3k+1$ 或 $3k+2$ 的形状，则 ω^m 和 ω^{2m} 两者之中有一个等于 ω，一个等于 ω^2，还要添上 $(-1)^m=1$ 的条件才能保证 $f(\omega)=0$. 所以答案是 $m=6k+2$ 或 $6k+4$，k 为非负整数.

20. 设余式为

$$r(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

仿照第二节例 3，得到

$$d-b=0,\quad c-a=0,\quad a+d-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}=-\frac{3}{2},\quad \frac{\sqrt{3}}{2}(c-b)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由此解出 $$a=c=-2,\quad b=d=-1.$$

答：余式为 $-2x^3-x^2-2x-1$.

21. 令 $x=\omega$，得

$$P(1)+\omega Q(1)=0.$$

以 ω 的值代入，分离实部和虚部，得

$$P(1)-\frac{1}{2}Q(1)=0,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}Q(1)=0,$$

由此 $$P(1)=Q(1)=0,$$

所以 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都被 $x-1$ 整除.

22. $x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1$

$$=(x^8+x^6+x^4+x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\times(x^8-x^6+x^4-x^2+1).$$

23. 将方程左端方幂和乘积展开，得

$$z^4+z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+4-\left(z^7+z^5+z^3+z+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^7}\right)=3.$$

去分母并按降幂排列，得

$$-z^{14}-z^{12}+z^{11}-z^{10}+z^9-z^8+z^7-z^6+z^5-z^4+z^3-z^2-1=0.$$

即 $$(-z^{14}+z^{13}-z^{12}+z^{11}-z^{10}+z^9-z^8+z^7-z^6$$
$$+z^5-z^4+z^3-z^2+z-1)-(z^{13}+z)=0.$$

易知 $z\neq-1$，因而此方程可变形为

$$-\frac{z^{15}+1}{z+1}-(z^{13}+z)=0,$$

即 $$z^{15}+1+(z+1)(z^{13}+z)=0.$$

$$z^{13}(z^2+z+1)+(z^2+z+1)=0,$$
$$(z^2+z+1)(z^{13}+1)=0.$$

由方程 $$z^2+z+1=0,$$

得 $$z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由方程 $$z^{13}+1=0,$$

即 $z^{13}=-1$，得 $$z_k=\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k,$$

式中 $$\varphi_k=\frac{(2k+1)\pi}{13},\quad k=0,1,2,\cdots,12.$$

24．取 M 作为复平面的零点，并设正三角形 ABC 是逆时针走向的，则点 $A(a)$，$B(b)$，$C(c)$ 满足等式

$$a+\omega b+\omega^2c=0.$$

由此 $$|a|=|-\omega b-\omega^2c|=|\omega|\cdot|b+\omega c|=|b+\omega c|$$
$$\leqslant|b|+|\omega c|=|b|+|c|.$$

即 $$MA\leqslant MB+MC.$$

同理 $$MB\leqslant MC+MA,\quad MC\leqslant MA+MB.$$

现在考虑等号成立的条件．例如设

$$|a|=|b|+|c|. \tag{1}$$

由 $|\omega|=1$，$a+b\omega+c\omega^2=0$，知这等价于

$$|b+\omega c|=|b|+|\omega c|,$$

即点 b 和 ωc 位于从点 $M(0)$ 引出的同一条射线上（图 18）．也就是说射线 MC 逆时针旋转 $120°$ 后落到 MB 位置，所以

$$\angle CMB=120°=180°-\angle CAB,$$

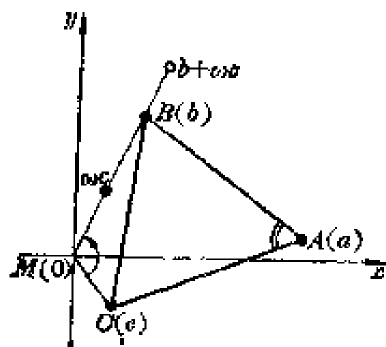


图 18

并且 M 和 A 点分居 CB 两侧．所以四点 M，A，B，C 共圆．反之，若 M 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，则由上列过程逆推，可得(1)式，即等式 $MA=MB+MC$．

原书缺页